Herkansing Wiskundige Structuren

5 juni 2008, 10:00-13:00, zaal Snellius 174

Bewijs al je beweringen. Schrijf kort, duidelijk en net. Rekenmachines en documenten (bijvoorbeeld het dictaat) zijn niet toegestaan. Tijdsduur: 3 uur. Succes!

1. Laat A, B en C verzamelingen zijn, en $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ afbeeldingen.
   (a) Geef een definitie van injectiviteit van f.
   (b) Bewijs of weerleg: als $g \circ f$ injectief is, dan is f injectief.
   (c) Bewijs of weerleg: als $g \circ f$ injectief is, dan is g injectief.

2. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ geldt dat $2^n \geq n^2$.

3. Laat $V \subseteq \mathbb{R}$ niet leeg zijn.
   (a) Neem aan dat V naar boven begrensd is. Geef een definitie van $\sup(V)$.
   (b) Laat $V \subseteq \mathbb{R}$ en $W \subseteq \mathbb{R}$ naar boven begrensd en niet leeg zijn. Bewijs dat $\sup(V \cup W)$ gelijk is aan $\max(\sup V, \sup W)$.

4. Los de vergelijking $\overline{11}x + \overline{13} = \overline{17}$ op in $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$.

5. (a) Geef een definitie van convergentie van een reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$ naar een reëel getal L.
   (b) Geef een definitie van Cauchy-rij.
   (c) We definiëren een reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$ recursief door: $x_0 = 0$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $x_{n+1} = x_n + (1/2)^{n^2}$. Bewijs dat deze rij convergeert. Hierbij mag je convergentieresultaten uit het dictaat gebruiken.

6. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = x/(1 + x^2)$. Bewijs of weerleg: f is uniform continu.

7. Bewijs de Stelling van Bolzano-Weierstrass (iedere begrensde reële rij heeft een convergente deelrij). De volledigheid van $\mathbb{R}$ mag je hierbij zonder bewijs gebruiken.

((5+5+5)+10+(5+10)+5+(5+5+10)+10+15=90)