Tweede herkansing Wiskundige Structuren

6 augustus 2008, 10:00-13:00, zaal Snellius 412

Bewijs al je beweringen. Schrijf kort, duidelijk en net. Rekenmachines en documenten (bijvoorbeeld het dictaat) zijn niet toegestaan. Tijdsduur: 3 uur. Succes!

1. Laat A, B en C deelverzamelingen van een verzameling Ω zijn.
   (a) Geef definities van $A \cup B$ en van $A \cap B$.
   (b) Bewijs dat $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Laat A een verzameling zijn, en $f\colon A \to A$ een functie.
   (a) Geef een definitie van bijectiviteit van f.
   (b) Neem aan dat $f \circ f\colon A \to A$ bijectief is. Bewijs dat f bijectief is.

3. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ geldt dat $3^n \geq 2{\cdot}n^2$.

4. (a) Laat $V \subseteq \mathbb{R}$ naar beneden begrensd en niet leeg zijn. Geef een definitie van $\inf(V)$.
   (b) Laat $V \subseteq \mathbb{R}$ en $W \subseteq \mathbb{R}$ naar beneden begrensd en niet leeg zijn. Bewijs dat $\inf(V \cup W)$ gelijk is aan $\min(\inf V, \inf W)$.

5. (a) Geef een definitie van convergentie van een reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$ naar een reëel getal L.
   (b) Laat $(x_n)_{n\geq 0}$ een begrensde, dalende reële rij zijn. Bewijs, rechtstreeks uit de definities, dat $(x_n)_{n\geq 0}$ naar $\inf\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ convergeert.

6. (a) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}$. Geef een definitie van continuïteit van f in c.
   (b) Bewijs of weerleg: er is een continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ geldt dat $f(x) = 1/x$.

7. Laat $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ en, voor $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon A \to \mathbb{R}$. Neem aan dat f en alle f_n begrensd zijn.
   (a) Geef een definitie van uniforme convergentie van de rij $(f_n)_{n\geq 0}$ naar f.
   (b) Neem aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ de functie f_n continu is, en dat $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform naar f convergeert. Bewijs dat f continu is.

((5+5)+(5+5)+10+(5+10)+(5+10)+(5+10)+(5+10)=90)