TENTAMEN WISKUNDIGE STRUCTUREN
19 JANUARI 2012, 10.00–13.00

Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

(1,10p) Bewijs dat voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt: als $a + b = a + c$ dan $b = c$. Gebruik hierbij enkel de volgende axioma's:
- (Z0) Voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$ geldt $x + y = y + x$;
- (Z1) Voor alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ geldt $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (Z2) Voor alle $x \in \mathbb{Z}$ geldt $x + 0 = x$ en $0 + x = x$;
- (Z3) Voor alle $x \in \mathbb{Z}$ bestaat er een $y \in \mathbb{Z}$ zodat $x + y = 0$.

Geef in elke tussenstap duidelijk aan welke axioma's je gebruikt.

(2,10p) Zij A een verzameling en zij $f : A \to A$ een functie.
- (a,5p) Geef een definitie van injectiviteit van f.
- (b,5p) Bewijs dat f injectief is dan en slechts dan als $f \circ f$ injectief is.

(3,10p) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sum_{k=0}^{n} 3k(k-1) = n^3 - n$.

(4,15p) Zij V een niet-lege begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$.
- (a,5p) Geef een definitie van het infimum van V.
- (b,5p) Zij W een niet-lege deelverzameling van V. Toon aan dat W naar onder begrensd is, en dat $\inf W \geq \inf V$.
- (c,5p) Neem aan dat $\sup V = \inf V$. Bewijs dat V uit precies één element bestaat.

(5,15p) Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie.
- (a,5p) Geef een definitie van continuïteit van f.
- (b,5p) Zij $D = \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Bewijs dat elke functie $f : D \to \mathbb{R}$ continu is.
- (c,5p) Zij $D = \{0\} \cup \{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Geef een voorbeeld (met bewijs) van een niet-continue functie $f : D \to \mathbb{R}$.

(6,10p) Bewijs dat elke stijgende naar boven begrensde rij convergent is.

(7,10p) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een reële rij. Neem aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is. Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is.

(8,10p) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een uniform continue functie. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reële rijen zodat $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar 0. Toon aan dat $(f(a_n) - f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ naar 0 convergeert. Wat als f enkel continu maar niet noodzakelijk uniform continu is?

totaal: 90p + 10p = 100p

Succes!