TENTAMEN WISKUNDIGE STRUCTUREN
20 JANUARI 2011, 10.00–13.00

Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

(1,10p) Zij A en B verzamelingen. Zij $f: A \to B$ een functie.

- (a,5p) Geef een definitie van injectiviteit van f, en geef een definitie van surjectiviteit van f.
- (b,5p) Zij $g: B \to A$ een functie zodat $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Laat zien dat f injectief is. Geef een voorbeeld waarbij f niet surjectief is.

(2,10p) Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k = n$.

(3,15p) Zij V een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$.

- (a,5p) Geef een definitie van een bovengrens en van het supremum van V.
- (b,5p) Zij $x \in \mathbb{R}$ een bovengrens van V. Bewijs dat $x = \sup V$ dan en slechts dan als voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ er een $v \in V$ bestaat met $v > x - \epsilon$.
- (c,5p) Zij A en B naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Bewijs dat $V = \{a + b: a \in A, b \in B\}$ naar boven begrensd is, en dat $\sup V = \sup A + \sup B$.

(4,15p) Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $f: D \to \mathbb{R}$ een functie.

- (a,5p) Geef definities van continuïteit en van uniforme continuïteit van f.
- (b,10p) Zij $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ een functie. Neem aan dat de functie $(0, \infty) \to \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$ uniform continu is en dat de rij $(f(1/n))_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ naar $f(0)$ convergeert. Bewijs dat f continu is in 0.

(5,10p) Zij $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een functie.

- (a,5p) Geef een definitie van differentiëerbaarheid van f.
- (b,5p) Bewijs uit de definitie dat de functie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}: x \mapsto 1/x$ differentiëerbaar is.

(6,15p) Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass.

(7,15p) Zij $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie.

- (a,5p) Geef een definitie van integreerbaarheid van f (de begrippen partitie, bovensom en ondersom hoef je niet te definiëren).
- (b,5p) Neem aan dat f continu is. Bewijs dat voor alle $\epsilon > 0$ er een partitie P van $[0, 1]$ bestaat met $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$.
- (c,5p) Neem aan dat f continu is. Bewijs dat f integreerbaar is.

totaal: 90p + 10p = 100p

Succes!