Hertentamen Wiskundige Structuren

Vrijdag 5 april 2013, 14.00-17.00 uur

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs je beweringen en geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

1. Laat A en B verzamelingen zijn en $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ twee functies.

(a) Geef een definitie van surjectiviteit van f.

(b) Neem aan dat $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Geldt nu ook dat $f \circ g = \mathrm{id}_B$?

(c) Neem aan dat f surjectief is en dat $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Toon aan dat $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

2. Laat n een natuurlijk getal zijn.

(a) Bewijs met behulp van volledige inductie dat $\sum_{j=0}^{n} 3^j = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$.

(b) Formuleer de Monotone Convergentiestelling voor rijen in $\mathbb{R}$ (je hoeft deze hier dus niet te bewijzen).

(c) Gegeven is een keten $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$ van gesloten intervallen in $\mathbb{R}$. Voor de lengte $|b_n - a_n|$ van elk interval $[a_n, b_n]$ is gegeven dat $|b_n - a_n| < 2^{-n}$. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ en $\lim_{n\to\infty} b_n$ bestaan en aan elkaar gelijk zijn.

3. Laat V een niet-lege begrensde deelverzameling zijn van $\mathbb{R}$.

(a) Geef een definitie van een supremum $\sup V$ van V.

(b) Zij W een niet-lege deelverzameling van V. Toon aan dat $\sup W \leq \sup V$.

4. Laat D een deelverzameling zijn van $\mathbb{R}$ en $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie. Zij c een punt in D.

(a) Geef een definitie van continuïteit van f in c.

(b) Stel dat voor iedere rij (x_n) in D met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$. Bewijs dat f continu is in c.

5. (a) Formuleer de stelling van Bolzano-Weierstrass (je hoeft deze hier dus niet te bewijzen).

(b) Geef een definitie van een Cauchyrij in $\mathbb{R}$.

(c) Laat zien dat elke Cauchyrij in $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft.

(d) Leid hieruit de Volledigheidsstelling af: iedere Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is convergent.

6. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn.

(a) Geef een definitie van uniforme continuïteit van f.

(b) Laat zien dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = |x - 1|$ uniform continu is.

Succes!