Tentamen Wiskundige Structuren

Vrijdag 17 januari 2014, 14.00-17.00 uur

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt. In totaal zijn 80 punten te behalen. Het tentamen kan worden ingezien op woensdag 22 januari van 16-17 u op kamer Sn240.

1. Laat A een verzameling zijn en $f, g\colon A \to A$ twee functies zodat $f \circ g = \mathrm{id}_A$.

(a) [5p] Toon aan dat f surjectief is.

(b) [6p] Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat f niet bijectief hoeft te zijn.
Suggestie: bekijk $A = \mathbb{N}$ en $g(x) = x + 1$.

2. [6p] Laat met behulp van volledige inductie zien dat voor elk natuurlijk getal n de formule $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n n(n+1)/2$ geldt.

3. We schrijven X voor de verzameling van functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Voor $f, g \in X$ schrijven we $f \sim g$ als $f(0) = g(0)$.

(a) [6p] Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is op X.

(b) [6p] Ga na dat $q\colon X \to \mathbb{N}\,,\ f \mapsto f(0)$ een quotiëntafbeelding is voor $\sim$.

4. Laat V een niet-lege begrensde deelverzameling zijn van $\mathbb{R}$.

(a) [5p] Geef een definitie van het infimum $\inf V$ van V.

(b) [6p] Wat is het infimum van het interval $(0, 1)$? Licht je antwoord toe.

(c) [6p] Bewijs de Monotone Convergentiestelling: laat (x_n) een stijgende en begrensde rij zijn in $\mathbb{R}$. Dan is (x_n) convergent.

5. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn.

(a) [5p] Geef een definitie van continuïteit van f.

(b) [6p] Stel dat f continu is met $f(0) = 3$. Laat (x_n) een rij zijn in $\mathbb{R}$ die naar 0 convergeert. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n \sin n) = 3$.

(c) [6p] Formuleer de Nulpuntsstelling en gebruik deze om te laten zien dat ieder derdegraads polynoom met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ een nulpunt heeft in $\mathbb{R}$.

6. Gegeven is voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ de functie $f_n(x) = \frac{-nx+n}{x^{2014}+n}$ op het interval $[0, 1]$. Ook is gegeven de functie $f(x) = -x + 1$ voor $x \in [0, 1]$.

(a) [5p] Laat zien dat $f_n \xrightarrow{p} f$.

(b) [6p] Bewijs dat $f_n \xrightarrow{u} f$ met behulp van de definitie van uniforme convergentie.

(c) [6p] Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Succes!