Hertentamen Wiskundige Structuren

Vrijdag 14 maart 2014, 14.00-17.00 uur

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt. In totaal zijn 80 punten te behalen. Het tentamen kan worden ingezien op woensdag 26 maart van 13-14 u op kamer Sn240.

1. Laat A en B verzamelingen zijn en $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ twee functies.

(a) [6p] Neem aan dat $g \circ f = \mathrm{id}_A$ en $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Toon aan dat f en g bijecties zijn, en inversen van elkaar zijn.

(b) [5p] Geef een voorbeeld waarin $g \circ f = \mathrm{id}_A$ en $f \circ g \neq \mathrm{id}_B$.

2. [6p] Voor de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{Z}$ is gegeven dat $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ voor $n \geq 2$. Toon aan dat voor elk natuurlijk getal n de formule $a_n = 2^n - 1$ geldt.

3. We schrijven X voor de verzameling van functies van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}$. Voor $f, g \in X$ schrijven we $f \sim g$ als $f(0) - g(0)$ deelbaar is door 3.

(a) [6p] Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is op X.

(b) [6p] Er bestaat een quotiëntafbeelding $q\colon X \to \{0, 1, 2\}$ voor $\sim$. Toon dit aan.

4. Laat V een niet-lege begrensde deelverzameling zijn van $\mathbb{R}$.

(a) [5p] Geef een definitie van het supremum $\sup V$ van V.

(b) [6p] Wat is het supremum van het interval $(0, 1)$? Licht je antwoord toe.

(c) [6p] Formuleer de stelling van Bolzano-Weierstrass en leid hieruit de Volledigheidsstelling af (d.w.z. iedere Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is convergent).

5. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn.

(a) [5p] Geef een definitie van uniforme continuïteit van f.

(b) [6p] Stel f is uniform continu. Laat (x_n), (y_n) rijen in $\mathbb{R}$ zijn zodat $\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.

(c) [6p] De functie cos is continu en strikt dalend op het interval $[0, \pi/2]$ (dit hoef je hier niet te bewijzen). Laat zien dat de vergelijking $\cos x = x$ precies één oplossing heeft op het interval $[0, \pi/2]$.

6. Gegeven is voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ de functie $f_n(x) = \frac{nx-n}{x^n+n}$ op het interval $[0, 1]$. Ook is gegeven de functie $f(x) = x - 1$ voor $x \in [0, 1]$.

(a) [5p] Laat zien dat $f_n \xrightarrow{p} f$.

(b) [6p] Bewijs dat $f_n \xrightarrow{u} f$ met behulp van de definitie van uniforme convergentie.

(c) [6p] Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.

Succes!