Tentamen Wiskundige Structuren

21 januari 2010, 10:00–13:00, zalen 174 en B1

Bewijs al je beweringen. Schrijf kort, duidelijk en net. Rekenmachines en documenten (bijvoorbeeld het dictaat) zijn niet toegestaan. Tijdsduur: 3 uur. Succes!

1. Laat A een verzameling zijn, en $f\colon A \to A$ een functie.
   (a) Geef een definitie van bijectiviteit van f.
   (b) Neem aan dat $f \circ f\colon A \to A$ bijectief is. Bewijs dat f bijectief is.
2. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ geldt dat $3^n \geq 2{\cdot}n^2$.
3. Zij $V \subseteq \mathbb{R}$ niet leeg en naar beneden begrensd.
   (a) Geef een definitie van convergentie van een reële rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naar een reëel getal x.
   (b) Geef definities van ondergrens van V en van $\inf(V)$.
   (c) Laat zien dat er een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V is die naar $\inf(V)$ convergeert.
4. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ een reële functie, en c in D.
   (a) Geef de definitie van continuïteit van f in c.
   (b) Neem aan dat f continu is in c. Bewijs dat er een δ in $\mathbb{R}_{>0}$ is zodat f begrensd is op $D \cap (c-\delta, c+\delta)$.
   (c) Laat $f\colon D \to \mathbb{R}$ en $g\colon D \to \mathbb{R}$ functies zijn die continu zijn in c. Bewijs, rechtstreeks uit de definitie van continuïteit, dat de productfunctie $fg\colon D \to \mathbb{R}$, gedefiniëerd door $x \mapsto f(x)g(x)$, continu is in c.
5. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie zijn.
   (a) Geef een definitie van uniforme continuïteit van f.
   (b) Bewijs of weerleg: de functie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x/(1+x)$ is uniform continu.
6. (a) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}$. Geef een definitie van differentieerbaarheid van f in c met afgeleide L.
   (b) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + |x|$. Is f differentieerbaar in 0?
   (c) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x{\cdot}(1 + |x|)$. Is f differentieerbaar in 0?
7. Bewijs de volledigheidsstelling: iedere Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is begrensd en convergent.

((5+5)+(10)+(5+5+5)+(5+5+5)+(5+5)+(5+5+5)+(15)=90)