# Hertentamen Wiskundige Structuren

Bas Edixhoven

23 mei 2007, 10–13 uur

Bewijs al je beweringen. Rekenmachines en documenten (bijv. dictaat) zijn niet toegestaan. Veel succes!

1. (a) Los in $S_9$ de vergelijking $(4\ 5)(1\ 4)\,\sigma\,(1\ 7\ 5) = (1\ 8\ 6\ 7\ 2\ 9)$ op; geef je antwoord in de "vierkante haken notatie" $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) \end{smallmatrix}\right]$.
   (b) Schrijf $\tau = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 9 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 \end{smallmatrix}\right]$ als product van disjuncte cykels.
   (c) Bereken de orde van $\tau$.
   (d) Bepaal of $\tau$ even of oneven is.
   (e) Geef $\tau^{2007}$ in "vierkante haken notatie".

2. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n$ in $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ geldt:
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n (n^2 + n)}{2}.$$

3. Laat $A = x^3 + 4x^2 + 2x - 3$ en $B = x^3 + 3x^2$ in $\mathbb{Q}[x]$. Bereken $\mathrm{ggd}(A, B)$ en geef $P$ en $Q$ in $\mathbb{Q}[x]$ met $PA + QB = \mathrm{ggd}(A, B)$.

4. Laat $n = 2007$. Los op in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de vergelijking: $\overline{1129}{\cdot}x = \overline{5}$.

5. (a) Geef een definitie van het begrip "gesloten deelverzameling in een metrische ruimte $(X, d)$". Als je hier andere begrippen bij gebruikt moet je die ook definiëren.
   (b) Laat $(X, d)$ een metrische ruimte zijn, $A$ een gesloten deelverzameling van $X$, en $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente rij in $X$. Neem aan dat $x_i \in A$ voor alle $i$. Laat zien dat de limiet dan ook in $A$ is.

6. (a) Laat $X$ en $Y$ metrische ruimten zijn, en $f\colon X \to Y$ een afbeelding. Laat $a \in X$, en neem aan dat voor iedere rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $X$ met limiet $a$ geldt dat de rij $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ in $Y$ convergeert naar $f(a)$. Bewijs dat $f$ continu is in $a$.
   (b) Laat direct uit de definitie zien dat de functie $f\colon [-10^{100}, 10^{100}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ uniform continu is.