

HERTENTAMEN WISKUNDIGE STRUCTUREN
26 MEI 2011, 14.00–17.00

Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

- (1,10p) Zij A, B, C verzamelingen. Zij $f: A \rightarrow B$ en $g: B \rightarrow C$ functies.
- (a,5p) Geef een definitie van injectiviteit van f , en geef een definitie van surjectiviteit van f .
 - (b,5p) Neem aan dat $g \circ f$ surjectief is, bewijs dat g surjectief is. Laat met een voorbeeld zien dat f niet noodzakelijk surjectief is.
- (2,10p) Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sum_{k=0}^n 2^{-k} = 2 - 2^{-n}$.
- (3,15p) Zij V een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van \mathbb{R} .
- (a,5p) Geef een definitie van een bovengrens en van het supremum van V .
 - (b,10p) Zij W de verzameling van bovengrenzen van V . Toon aan dat W naar beneden begrensd is, en dat $\inf W = \sup V$.
- (4,15p) Zij D een deelverzameling van \mathbb{R} en $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie.
- (a,5p) Geef definities van continuïteit en van uniforme continuïteit van f .
 - (b,10p) Bewijs of weerleg: de functie $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x-1}$ is uniform continu.
- (5,15p) Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie.
- (a,5p) Geef een definitie van differentiëerbaarheid van f in 0.
 - (b,10p) Neem aan dat f differentiëerbaar is in 0. Bewijs uit de definitie dat $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = xf(x)$ differentiëerbaar is in 0.
- (6,15p) Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass.
- (7,10p) Zij $a < b$ reële getallen en $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie.
- (a,5p) Geef een definitie van bovenintegraal en onderintegraal van f .
 - (b,5p) Bewijs dat de bovenintegraal groter dan of gelijk aan de onderintegraal is.

totaal: 90p + 10p = 100p

Succes!