Extra Tentamen Wiskundige Structuren

Bas Edixhoven

30 januari 2007, 10–13 uur

Bewijs al je beweringen. Rekenmachines en documenten (bijv. dictaat) zijn niet toegestaan. Veel succes!

1. (a) Los in S_9 de vergelijking $(1\ 5\ 7)\,\sigma\,(1\ 4)(4\ 5) = (1\ 9\ 2\ 7\ 6\ 8)$ op; geef je antwoord in de “vierkante haken notatie” $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) \end{smallmatrix}\right]$.
   (b) Schrijf $\tau = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right]$ als product van disjuncte cykels.
   (c) Bereken de orde van τ.
   (d) Bepaal of τ even of oneven is.
   (e) Geef τ^{2007} in “vierkante haken notatie”.

2. Bewijs met volledige inductie dat voor alle n in $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ geldt:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n^3 - n}{3}.$$

3. Laat $A = x^3 + x^2 + 4$ en $B = x^3 + 2x^2$ in $\mathbb{Q}[x]$. Bereken $\mathrm{ggd}(A, B)$ en geef P en Q in $\mathbb{Q}[x]$ met $PA + QB = \mathrm{ggd}(A, B)$.

4. Laat $n = 2007$. Los op in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de vergelijking: $\overline{772}\cdot x = \overline{5}$.

5. (a) Geef een definitie van het begrip “open deelverzameling in een metrische ruimte (X, d)”. Als je hier andere begrippen bij gebruikt moet je die ook definiëren.
   (b) Geef een voorbeeld van een (X, d) en een deelverzameling A die niet open en ook niet gesloten is; je moet dus bewijzen dat je deelverzameling A die eigenschappen heeft.

6. (a) Laat X en Y metrische ruimten zijn, en $f\colon X \to Y$ een afbeelding. Laat $a \in X$, en neem aan dat voor iedere rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X met limiet a geldt dat de rij $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ in Y convergeert naar $f(a)$. Bewijs dat f continu is in a.
   (b) Laat direct uit de definitie zien dat de functie $f\colon [0, 100] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ uniform continu is.