HERTENTAMEN WISKUNDIGE STRUCTUREN
31 MEI 2012, 10.00–13.00

Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

(1,10p) Zij $a \in \mathbb{R}$ en zij $b, c \in \mathbb{R}$ additieve inversen van a. Bewijs dat $b = c$. Gebruik hierbij enkel de volgende axioma's:
- (R0) Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt $x + y = y + x$;
- (R1) Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (R2) Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $x + 0 = x$ en $0 + x = x$;
- (R3) Voor alle $x \in \mathbb{R}$ bestaat er een $y \in \mathbb{R}$ zodat $x + y = 0$.

Geef in elke tussenstap duidelijk aan welke axioma's je gebruikt.

(2,10p) Zij A, B verzamelingen en $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ functies met $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
- (a,5p) Geef definities van injectiviteit en surjectiviteit van een functie.
- (b,5p) Bewijs dat f injectief en g surjectief is.

(3,10p) Bewijs door volledige inductie dat voor alle $N \in \mathbb{N}$ geldt $\sum_{n=1}^{N} n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

(4,10p) Zij V en W niet-lege naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.
- (a,5p) Geef een definitie van het surpremum van V.
- (b,5p) Bewijs dat $V \cup W$ niet-leeg en naar boven begrensd is en dat $\sup V \cup W = \max\{\sup V, \sup W\}$.

(5,15p) Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie.
- (a,5p) Geef een definitie van continuïteit van f.
- (b,5p) Bewijs dat elke functie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ continu is.
- (c,5p) Geef een voorbeeld (met bewijs) van een niet-continue $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

(6,10p) Bewijs dat elke continue functie $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ uniform continu is. Je mag hierbij de stelling van Bolzano-Weierstrass gebruiken.

(7,15p) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een reële rij. Bewijs of weerleg:
- (a,5p) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ convergent.
- (b,10p) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ absoluut convergent.

(8,10p) Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu, surjectief en strikt stijgend. Bewijs dat f bijectief is en dat de inverse functie $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is.

totaal: 90p + 10p = 100p

Succes!