De Zariski-topologie versus de ‘sterke’ topologie

Voor topologische algebraïsch afgesloten lichamen k is het zinvol om naast de Zariski-topologie op variëteiten over k ook de zogenaamde ‘sterke’ topologie te bekijken. Hiervoor gelden onder meer de volgende eigenschappen: de sterke topologie is fijner dan de Zariski-topologie; de sterke topologie op $X \times Y$ is het product van de sterke topologieën op X en Y; de sterke topologie op $\mathbb{A}^1$ is precies de gegeven topologie op k. Er volgt bijvoorbeeld dat variëteiten Hausdorffs zijn in de sterke topologie.

In [1] wordt het geval $k = \mathbb{C}$ bekeken. Zo geldt bijvoorbeeld het volgende zeer nuttige resultaat: een variëteit X over $\mathbb{C}$ is compleet $\Leftrightarrow$ X is compact in de sterke topologie. Het bewijs dat in [1] wordt gegeven maakt gebruik van een aantal lemma’s die op zichzelf ook interessant zijn. Zo volgt de implicatie $\Rightarrow$ vrij snel uit het zogenaamde Chow’s Lemma: elke complete variëteit is het beeld onder een surjectief birationaal morfisme van een projectieve variëteit. Voor de implicatie $\Leftarrow$ kan men uit de voeten met de observatie dat een niet-leeg Zariski open stuk van een variëteit ook dicht is in de sterke topologie.

Doel van dit bachelorwerkstuk is om de technieken te begrijpen die in bovengenoemd resultaat gaan zitten, en om meer te zeggen over ‘de Zariski-topologie versus de sterke topologie’. Zo kan het genoemde resultaat over $k = \mathbb{C}$ bijvoorbeeld veralgemeend worden naar andere lokaal compacte topologische lichamen. Er geldt dan bijvoorbeeld: neem een lokaal compact topologisch lichaam K, zij $k \subset K$ een deellichaam en zij X een variëteit over k. Dan is X compleet dan en slechts dan als voor elke eindige uitbreiding K' van K de verzameling $X(K')$ van K'-rationale punten van X compact is in de sterke topologie. Voor dit resultaat zijn aan de ene kant meer analytisch en aan de andere kant meer algebraïsch georienteerde bewijzen te geven [2].

Literatuur

[1] D. Mumford, The Red Book of varieties and schemes. Lecture Notes in Mathematics 1358.
[2] O. Lorscheid, Completeness and compactness for varieties over a local field. arXiv:math.AG/0410346.

Begeleider: R.S. de Jong.