Schubert calculus

Hoeveel lijnen snijden vier gegeven lijnen in $\mathbb{P}^3$? Hoeveel lijnen snijden zes gegeven vlakken in $\mathbb{P}^4$? Een antwoord op deze vragen kan men vinden door middel van Schubert calculus, oftewel snijtheorie op Grassmann-variëteiten. Voor elke $0 \leq d \leq n$ kan men de verzameling lineaire deelruimten van $\mathbb{P}^n$ van dimensie d voorzien van een natuurlijke structuur als projectieve algebraïsche variëteit $G_{d,n}$ van dimensie $(n-d)(d+1)$ en ingebed in $\mathbb{P}^N$ waarbij $N = \binom{n+1}{d+1} - 1$; dit gaat met behulp van zogenaamde Plücker-coördinaten. Voorbeeld: de verzameling lijnen $(d = 1)$ in $\mathbb{P}^3$ is op natuurlijke wijze een projectieve variëteit van dimensie 4 in $\mathbb{P}^5$.

De Grassmann-variëteiten bevatten allerlei natuurlijke deelvariëteiten. Deze worden gegeven door zogenaamde Schubert-condities: laat $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d$ een keten inclusies van lineaire deelruimten van $\mathbb{P}^n$ zijn (een zogenaamde vlag). We definiëren $\Omega(A_0, A_1, \ldots, A_d)$ als de deelverzameling van $G_{d,n}$ van lineaire deelruimten X van dimensie d in $\mathbb{P}^n$ met $\dim(A_i \cap X) \geq i$ voor $i = 0, \ldots, d$. Het kan bewezen worden dat de $\Omega(A_0, \ldots, A_d)$ projectieve deelvariëteiten zijn van de $G_{d,n}$. Verder, als $B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_d$ een tweede vlag is met $\dim A_i = \dim B_i$ voor $i = 0, \ldots, d$, dan is er een inverteerbare projectieve lineaire transformatie van $\mathbb{P}^N$ naar zichzelf die $G_{d,n}$ in zichzelf overvoert en $\Omega(A_0, \ldots, A_d)$ in $\Omega(B_0, \ldots, B_d)$ overvoert.

De Schubertvariëteiten $\Omega(A_0, \ldots, A_d)$ en $\Omega(B_0, \ldots, B_d)$ zijn hiermee projectief equivalent; noemen we $a_0 = \dim A_0, \ldots, a_d = \dim A_d$ dan verkrijgen we op deze manier een welbepaalde projectieve equivalentieklasse $\Omega(a_0, \ldots, a_d)$. Een dergelijke klasse wordt een Schubert-cykel genoemd. Voorbeeld: voor $d = 1, n = 3$ is $\Omega(1, 2)$ de klasse van lijnen die in een gegeven vlak liggen, en $\Omega(1, 3)$ is de klasse van lijnen die een gegeven lijn ergens snijden.

Wanneer twee algebraïsche deelverzamelingen van complementaire dimensie in $G_{d,n}$ met elkaar worden gesneden, krijgt men in het algemeen een eindig aantal punten. Typisch representeert zo'n eindige verzameling punten een oplossing voor een enumeratief probleem zoals bovenaan gesteld. De snijtheorie van Schubert-cykels wordt bepaald door een aantal klassieke formules, die ook bekend zijn uit de theorie van symmetrische polynomen.

Een bachelorproject rond Schubert calculus kan een aantal kanten op. De theorie zelf kan op een elementaire en zeer concrete manier worden doorgewerkt; zie hiervoor bijvoorbeeld [1] en [2]. Als deze invalshoek wordt gekozen is het bijvoorbeeld aardig om de enumeratieve grondslag van de theorie in het oog te houden. Aan de andere kant kan men ook op meer abstracte manier tegen de theorie aankijken, via de tautologische vectorbundel en karakteristieke klassen. Zie bijvoorbeeld [3]; hier zal wel eerst wat meer algemene theorie voor moeten worden geleerd.

Literatuur

[1] S.L. Kleiman en D. Laksov, *Schubert calculus.* The American Mathematical Monthly, vol. 79, no. 10 (1972), pp. 1061–1082.
[2] W.V.D. Hodge en D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, volume 2. Cambridge University Press, 1968.
[3] W. Fulton, *Intersection theory.* Springer Verlag 1998.

Begeleider: R.S. de Jong.