De Borel Hiërarchie

Floris Olsthoorn

19 maart 2008

In de beschrijvende verzamelingenleer onderzoeken we deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ (of meer algemeen *Poolse ruimten* — separabele volledig metrizeerbare ruimten) die 'goed te beschrijven zijn'. De eerste klasse van mooie deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die we beschouwen is de klasse van *Borel verzamelingen*. Op een metrische ruimte X wordt de *Borel Hiërarchie* recursief gedefinieerd door

$$\begin{aligned}
&\Sigma^0_1(X) = \{U \subseteq X : U \text{ is open}\},\\
&\Pi^0_\xi(X) = \sim \Sigma^0_\xi(X) = \{A^c : A \in \Sigma^0_\xi(X)\},\\
&\Sigma^0_\xi(X) = \{\bigcup_n A_n : A_n \in \Pi^0_{\xi_n}, \xi_n < \xi, n \in \mathbb{N}\}, \text{ als } \xi > 1,
\end{aligned}$$

waarbij elke ξ een aftelbaar ordinaalgetal is. Als we deze klassen verenigen over alle aftelbare ordinaalgetallen, dan krijgen we de Borel σ-algebra $\mathbf{B}(X)$ op X:

$$\mathbf{B}(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi^0_\xi(X),$$

waarbij ω_1 het eerste overaftelbare ordinaalgetal is.

In deze voordracht behandelen we in detail bovenstaande beweringen en bewijzen we dat de Borel hiërarchie strikt stijgend (wat betreft inclusie) is voor elke overaftelbare Poolse ruimte. Het bewijs maakt gebruik van het bestaan van $\mathcal{C}$-*universele* verzamelingen voor elke Borel klasse, waarbij $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ de *Cantor ruimte* is. Stel Γ is een Borel klasse. Een verzameling $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \times X$ heet $\mathcal{C}$-*universeel voor* $\Gamma(X)$ als $\mathcal{U} \in \Gamma(\mathcal{C} \times X)$ en $\{\mathcal{U}_c : c \in \mathcal{C}\} = \Gamma(X)$ — $\mathcal{U}_c$, de *c-sectie* van $\mathcal{U}$, is de verzameling $\mathcal{U} \cap (\{c\} \times X)$. Een dergelijke universele verzameling geeft een codering van de verzamelingen in $\Gamma(X)$, waarbij c de code is voor de verzameling $\mathcal{U}_c$. Aangezien elke overaftelbare Poolse ruimte een kopie van $\mathcal{C}$ bevat, kunnen we een diagonaalargument gebruiken om het strikt stijgend zijn van de Borel hiërarchie aan te tonen.