Analytische verzamelingen

Floris Olsthoorn

23 april 2008

In de vorige voordracht over beschrijvende verzamelingenleer bekeken we de klasse van Borelverzamelingen. Deze klasse kan verkregen worden door te beginnen met alle open verzamelingen en vervolgens alle complementen van opens toe te voegen, daarna alle aftelbare verenigingen van die complementen, daarna alle complementen dààrvan, en zo verder. We hebben bewezen dat als je ruimte overaftelbaar en Pools is (separabel en volledig metrizeerbaar), dit proces ω_1 keer herhaald moet worden om alle Borelverzamelingen te vinden. Voor het bewijs hiervan gebruikten we het concept universele verzameling.

De klasse van Borelverzamelingen is gesloten onder aftelbare verenigingen, complementen en continue volledige originelen. Is deze klasse ook gesloten onder continue beelden? Om deze vraag te beantwoorden bekijken we de klasse van verzamelingen die een continu beeld van een Poolse ruimte zijn, de *analytische verzamelingen*. Het blijkt dat elke analytische verzameling een continu beeld van een Borelverzameling (in een Poolse ruimte) is en andersom, dus elke borelverzameling is analytisch, maar geldt de omgekeerde bewering? Het antwoord op deze vraag zullen we in deze voordracht geven en bewijzen. Hiervoor hebben we weer het begrip universele verzameling nodig.

In de beschrijvende verzamelingenleer proberen we ons te beperken tot een zo groot mogelijke klasse van 'mooie' deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, en de analytische verzamelingen hebben een aantal mooie eigenschappen. Ze zijn Lebesgue-meetbaar, hebben de Baire eigenschap ('bijna open', i.e. er bestaat een open verzameling waarmee het symmetrisch verschil een magere verzameling is) en ze voldoen aan de continuümhypothese: elke analytische verzameling is ofwel aftelbaar, ofwel heeft de cardinaliteit van $\mathbb{R}$.