$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

1. Quaternionen

Het lichaam $\mathbb{C}$ van complexe getallen is, naast $\mathbb{R}$ zelf, de enige eindig-dimensionale lichaamsuitbreiding van $\mathbb{R}$. Doch, waneer we de eis laten vallen dat in een lichaam de vermenigvuldiging commutatief moet zijn, dan blijkt er nog een uitbreiding van $\mathbb{R}$ te bestaan: de quaternionenalgebra $\mathbb{H}$. Elementen van $\mathbb{H}$ hebben de vorm $a + bi + cj + dk$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en vermenigvuldiging is gedefinieerd door middel van de rekenregels

$$\begin{aligned} ij = -ji &= k \\ jk = -kj &= i \\ ki = -ik &= j \\ i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \end{aligned}$$

De verkregen vermenigvuldiging is associatief, en elk niet-nul element van $\mathbb{H}$ heeft een multiplicatieve inverse. $\mathbb{H}$ is dus een delingsring.

Quaternionen worden gebruikt om rotaties in drie en vier dimensies te representeren, en ze spelen een rol in de topologie, de getaltheorie en de natuurkunde.

2. Octonionen

Er bestaat ook een acht-dimensionale structuur $\mathbb{O}$, de algebra van octonionen. In deze algebra is de vermenigvuldiging niet langer associatief, maar er geldt wel nog steeds dat elk niet-nul element een multiplicatieve inverse heeft.

Ondanks de vreemde eigenschap dat vermenigvuldiging niet associatief is, komen de octonionen toch op verschillende plaatsen in de wiskunde (en natuurkunde) voor.

3. En verder?

Een hele diepe stelling uit de topologie (!) impliceert dat hier het rijtje stopt:

Stelling. *Zij $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto xy$ een vermenigvuldiging op $\mathbb{R}^n$ die voldoet aan*

(1) *er bestaat een $e \in \mathbb{R}^n$ zodat $ex = x = xe$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$;*
(2) *voor elke vaste $a \in \mathbb{R}^n$ zijn links- en rechtsvermenigvuldiging met a lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$;*
(3) *voor elke $a \neq 0$ bestaan er x, y met $ax = e$ en $ya = e$.*

Dan is $\mathbb{R}^n$ met zijn vermenigvuldiging isomorf met $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ of $\mathbb{O}$.

Het bewijs hiervan maakt gebruik van nogal wat geavanceerde wiskunde (onder andere de zogenaamde K-theorie), maar er zijn allerlei interessante zwakkere varianten op deze stelling die met wat algebra of topologie kunnen begrepen worden.

Dit project kan men zowel uit een meer algebraïsche of een meer topologische hoek benaderen. Literatuur zal in overleg met de student worden uitgezocht.