Het aantal conjugatieklassen van een eindige groep

Jan Rozendaal

6 februari 2008

We definiëren $m(k) : \mathbf{Z}_{>0} \to \mathbf{Z}_{>0}$ door $m(k) = \max\{\#G \mid G \text{ is een groep met } \leq k \text{ conjugatieklassen}\}$. We dienen eerst aan te tonen dat deze functie welgedefinieerd is. Het blijkt hiertoe voldoende te zijn om voor vaste k te bewijzen dat de vergelijking

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_k} \tag{1}$$

slechts eindig veel verschillende oplossingen heeft met $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbf{Z}_{>0}$. Met inductie werd dit al bewezen in 1903 door Edmund Landau.
Nu bestaan er een lineaire ondergrens en een dubbelexponentiele bovengrens voor $m(k)$:

$$k \leq m(k) \leq 2^{2^k},$$

het doel van het project is het gat tussen deze twee grenzen enigszins te dichten. Hier zal veel literatuuronderzoek aan te pas komen.
Een verbetering van de bovengrens uit een artikel van L. Pyber wordt gegeven door

$$n \leq d^{k({}^2\log k)^8},$$

verbeteringen van de ondergrens kunnen bereikt worden door groepen met een grote orde en weinig conjugatieklassen te vinden.
De waarden van $m(k)$ voor $k \leq 12$ zijn bekend en doen, samen met resultaten voor bijvoorbeeld oplosbare groepen, vermoeden dat er een bovengrens voor $m(k)$ van de vorm $m(k) \leq c^k$ is.
Een andere mogelijke richting om te onderzoeken is de vraag of er voor elke $k \in \mathbf{Z}_{>1}$ een oneindige groep bestaat met k conjugatieklassen. Voor $k = 2$ is zo'n groep te vinden in Serre's boek *Trees*.

Begeleider: H.W. Lenstra