Vektorbundels

Laat X een n-dimensionale differentieerbare variëteit zijn. Een vektorbundel met rang r over X is een $(n+r)$-dimensionale differentieerbare variëteit E samen met een differentieerbare afbeelding $p : E \longrightarrow X$ (de projectie) die aan de volgende eisen voldoen:
Er is een open overdekking $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ zodat er voor elk $i \in I$ een diffeomorfisme

$$\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$$

(lokale trivialisatie) bestaat met de volgende eigenschappen:
1. Voor alle $i \in I$ geldt $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_i = p|_{p^{-1}(U_i)}$, waarbij $pr_1 : U_i \times \mathbb{R}^r \longrightarrow U_i$ de gewone projectie op de eerste component is. I.h.b. geldt $\phi_i(p^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$ voor alle $x \in U_i$.
2.Voor alle $i, j \in I$ en alle $x \in U_i \cap U_j$ is

$$g_{ji}(x) : \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \ \mathbb{R}^r \cong \phi_i(p^{-1}(x)) \longrightarrow \phi_j(p^{-1}(x)) \cong \mathbb{R}^r$$

een lineaire afbeelding; omdat de ϕ_i's diffeomorfismen zijn is deze lineaire afbeelding automatisch een isomorfisme.

Voor $x \in X$ heet $E(x) := p^{-1}(x)$ de vezel van E in x; wegens 1. en 2. heeft $E(x)$ een natuurlijke r-dimensionale vektorruimte-structuur. Intuïtief verkrijgt men de vektorbundel E door in elk punt x de vektorruimte $E(x)$ op geschikte manier vast te plakken.

Voorbeelden
1. De triviale bundel is het produkt $E = X \times \mathbb{R}^r$ met projectie $p = \mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{R}^r \longrightarrow X$ en vezels $E(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$.
2. De raakbundel TX van X: als verzameling is dit de disjunkte vereniging $TX = \coprod_{x \in X} T_xX$ van de raakruimten aan X; de projectie beeldt elke T_xX af naar x, de vezel van TX in x is dus T_xX.
3. Stel dat X een deelvariëteit van de $\mathbb{R}^N$ is; voor $x \in X$ is de raakruimte T_xX dan een lineaire deelruimte van de $\mathbb{R}^N$. De normaalbundel N_X van X is een vektorbundel over X wiens vezel $N_X(x)$ het orthogonale complement (t.o.v. het standaard inproduct) van T_xX in $\mathbb{R}^N$ is. Algemener kan de normaalbundel van een deelvariëteit in een willekeurige variëteit worden gedefinieerd.
4. Laat $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ de n-dimensionale projectieve ruimte zijn, d.w.z. de verzameling van lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^{n+1}$. De tautologische lijnbundel over $\mathbb{P}$ is de rang 1 vektorbundel $p : \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \longrightarrow \mathbb{P}$ gegeven als volgt: Beschouw de triviale vektorbundel $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{P} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}$; dan geldt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) = \{ \ (l, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l \ \} \quad , \quad p := \mathrm{pr}_1|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)} \ .$$

De vezel van $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ in een punt $l \in \mathbb{P}$ is dan l zelf gezien als een lijn in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Veel begrippen uit de theorie van vektorruimten (deelruimte, quotient, dualiteit, tensorprodukt etc.) kunnen worden gegeneraliseerd naar vektorbundels; bijvoorbeeld is $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ een deelbundel van de triviale bundel $\mathbb{P} \times \mathbb{R}^{n+1}$, en het resulterende quotient is het tensorprodukt van de raakbundel $T\mathbb{P}$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$.

De scriptie over vektorbundels zal bestaan uit en algemeen deel waarin grondslagen van de theorie worden samengevat, en een deel waarin in overleg met de student specifieke voorbeelden behandeld en uitspraken bewezen worden, bijvoorbeeld degene boven over het verband tussen $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ en $T\mathbb{P}$, of het feit dat een hyperoppervlak in een georiënteerde varieteit zelf georienteerd is d.e.s.d. als zijn normaalbundel triviaal is.

Nodige voorkennis: het college Inleiding variëteiten of Meetkunde
Literatuur: zal in overleg worden uitgezocht

Begeleider: M. Lübke