# Relations entre développements en série de Fourier d'une nouvelle forme

Bas Edixhoven

Rencontres Arithmétiques, Caen, le 11 juin 1993

## 1 Applications aux paramétrisations modulaires

Soit $E$ une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, modulaire et de conducteur $N$. Il existe donc un morphisme non constant $\phi\colon X_0(N)_{\mathbf{Q}} \to E$, où $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$ est la courbe modulaire sur $\mathbf{Q}$ classifiant les isogénies, entre courbes elliptiques, de degré $N$ et de noyau "cyclique". En composant $\phi$ par une translation, on peut supposer que $\phi$ envoie la pointe $\infty$ dans $X_0(N)_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q})$ sur le point 0 dans $E(\mathbf{Q})$. Un tel morphisme $\phi$ est appelé une paramétrisation modulaire de $E$, et on dit que $\phi$ est une paramétrisation forte si le morphisme $\phi^*\colon E \to J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ entre les jacobiennes de $E$ et de $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$ est injectif. Pour $\phi\colon X_0(N)_{\mathbf{Q}} \to E$ une paramétrisation modulaire, il existe une paramétrisation modulaire forte $\phi'\colon X_0(N)_{\mathbf{Q}} \to E'$ et une isogénie $\alpha\colon E' \to E$ telles que $\phi = \alpha \circ \phi'$; la courbe $E'$ est nécessairement l'image de $E$ dans $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ par $\phi^*$ et $\phi'$ est unique à signe près.

Soit $\mathcal{E}$ le modèle de Néron sur $\mathbf{Z}$ de $E$. Le $\mathbf{Z}$-module $0^*\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathbf{Z}})$ des formes différentiels invariantes est alors libre de rang un, donc s'écrit $\mathbf{Z}\cdot\omega$ avec $\omega$ déterminé à signe près. L'image réciproque $\phi^*\omega$ dans $\Gamma(X_0(N)_{\mathbf{Q}}, \Omega^1)$ est alors un vecteur propre pour les opérateurs de Hecke, ce qui implique que $\phi^*\omega$ est un multiple de la nouvelle forme normalisée associée à $E$:

$$\phi^*\omega = c\left(\sum_{n\geq 1} a_n q^n\right) q^{-1}dq \tag{1.1}$$

avec $c \in \mathbf{Q}^*$ et $\sum_n a_n n^{-s}$ la fonction-$L$ associée à $E$. En particulier, pour $p$ et $l$ des nombres premiers différents, $a_p$ est la trace d'un élément de Frobenius $\mathrm{Frob}_p$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (induisant $x \mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$) agissant sur le $\mathbf{Q}_l$-espace vectoriel des co-invariants $V_l(E)_{I_p}$ (ici, $I_p$ est le sous-groupe d'inertie dans un groupe de décomposition $D_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/Q)$). Le nombre rationnel $c$ s'appelle la constante de Manin associée à $\phi$.

**1.2 Conjecture (Manin).** *Si $\phi$ est forte, alors $c = \pm 1$.*

A partir de maintenant, supposons que $\phi$ est une paramétrisation forte. On sait que $c$ est un entier (cela se démontre facilement en prolongeant $\phi$ sur des modèles (non propres) convenables de $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$ et de $E$). Le problème est donc de montrer qu'aucun nombre premier $p$ ne divise $c$.

**1.3 Théorème (Mazur, 1978).** *Si $p > 2$ et $E$ a réduction semi-stable en $p$, alors $c$ n'est pas divisible par $p$.*

En ce qui concerne le cas $p = 2$, Raynaud a démontré le résultat suivant.

**1.4 Théorème (Raynaud, 1985?).** *Si $E$ a réduction multiplicative ou bonne réduction supersingulière en caractéristique 2, alors 2 ne divise pas $c$. Si $E$ a bonne réduction ordinaire en caractéristique 2, alors 4 ne divise pas $c$.*

Il reste donc à traiter les $p$ où la courbe $E$ a réduction additive. Stevens a etudié les paramétrisations de courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ par les courbes modulaires $X_1(N)_{\mathbf{Q}}$ dans son article "Stickelberger elements and modular parametrizations of elliptic curves". Il conjecture que chaque courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ qui est modulaire admet une paramétrisation par $X_1(N)_{\mathbf{Q}}$ dont la constante de Manin est $\pm 1$. Il démontre que cette conjecture est compatible à torsion quadratique par $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ pour $K$ non-ramifié en les nombres premiers où $E$ a réduction additive. Il montre aussi, en utilisant des résultats de Rubin sur des valeurs spéciales de fonctions-$L$, qu'une version faible de sa conjecture est vérifiée par certaines courbes elliptiques à multiplication complexe. En utilisant la classification par Mazur des points de torsion rationnel des courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$, on voit que la conjecture de Stevens est équivalente à la conjecture de Manin en ce qui concerne les nombres premiers $p > 7$. On en tire le résultat suivant.

**1.5 Théorème (Stevens, 1989).** *Soit $p > 7$ un nombre premier tel qu'il existe une tordue de $E$ qui a réduction semi-stable en $p$. Alors $p$ ne divise pas $c$.*

Les résultats mentionnés jusqu'ici ne disent rien sur la valuation de $c$ en les nombres premiers $p$ où $E$ a réduction additive de symbole de Kodaira $II$, $III$, $IV$, $IV^*$, $III^*$ ou $II^*$ (c'est à dire, les nombres premiers où aucune tordue de $E$ a réduction semi-stable). En combinant l'étude de modèles stables de courbes modulaires que j'ai fait dans ma thèse (Utrecht, 1989, voir aussi "On the Manin constants of modular elliptic curves") avec l'étude des développements en série de Fourier de la nouvelle forme associée à $E$, on obtient le résultat suivant.

**1.6 Théorème.** *Si $p > 7$, alors $p$ ne divise pas $c$.*

A vrai dire, on obtient en plus d'autres résultats concernant la réduction stable modulo $p$ de $\phi$, pour $p > 7$ un nombre premier où $E$ a réduction additive (par exemple, on trouve que la réduction stable de $\phi$ se factorise à travers Frobenius si et seulement si $E$ a réduction de type $IV^*$, $III^*$ ou $II^*$). Le problème qui reste, évidemment, est de savoir ce qui se passe pour les $p$ dans $\{2, 3, 5, 7\}$. Les méthodes utilisées pour la démonstration du Théorème 1.6 devraient donner une majoration raisonnable pour les exposants de 5 et 7 dans $c$ (1 ou 2 par exemple). Pour $p$ dans $\{2, 3\}$ le problème semble beaucoup plus dur: pour obtenir une majoration avec les mêmes méthodes on doit majorer $v_p(t)$, où $v_p$ est la valation sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ normalisée par $v_p(p) = 1$ et où $xy = t$ est une équation locale formelle du modèle stable sur une extension finie de $\mathbf{Z}_p$ de $X_0(2^8 l)$ ou de $X_0(3^5 l)$. Autrement dit, il faut majorer les "ampleurs" des singularités dans les modèles stables des courbes modulaires intervenant dans les paramétrisations fortes. Un problème très intéressant et un peu plus général est de déterminer les $v_p(t)$, où $xy = t$ est une équation locale formelle du modèle stable sur une extension finie de $\mathbf{Z}_p$ de $X(p^n l)$ pour tous $n$ et $p$. Déja pour $n = 2$ et $p > 3$ on ne connait pas la réponse.

Signalons enfin qu'il n'y a pas mal d'évidence en faveur de la conjecture de Manin: la conjecture a été vérifiée pour les courbes elliptiques modulaires de conducteur $\leq 1000$ (pour N$\leq$ 200 cela a été fait dans Antwerpen IV et pour $N$ jusqu'a 1000 cela a été fait par Cremona dans don livre "Algorithms for modular elliptic curves"). Stevens lui aussi a vérifié sa conjecture pour $N \leq 200$.

Expliquons maintenant à quoi sert l'étude des développements en série de Fourier de la nouvelle forme associée à $E$. Soit $X/\mathcal{O}_K$ un modèle stable de la courbe modulaire en question sur l'anneau des entiers d'une extension finie $K$ de $\mathbf{Q}_p$. Soit $X_p$ la fibre spéciale de $X$ et soit $P\colon \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \to X$ une pointe. On sait que $P$ se spécialise vers le lieu lisse d'une composante irréductible $C$, dépendant de $P$, de $X_p$. Notons par $t$ le point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et par $\eta$ le point générique. Soit $A = \mathcal{O}_{X,P(t)}$ l'anneau local de $X$ en le point fermé $P(t)$, et $\hat{A}$ son completé lelong de l'image de $P$. Alors la théorie de la courbe de Tate donne un isomorphisme entre $\hat{A}$ et $\mathcal{O}_K[[q^{1/e}]]$ avec $e$ divisant le niveau de $X$. Le développement en série de Fourier d'une forme modulaire $f$ sur $X_K$, disons de poids $k$, en $P$ s'écrit $(\sum_{n\geq 1} b_n q^{n/e})(t^{-1}dt)^{\otimes k}$, avec les $b_n \in K$. Soit $\eta_C$ le point générique de $C$. Alors l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\eta_C}$, qui est une localisation de $A$, est un anneau de valuation discrète; soit $v_C$ la valuation normalisée par $v_C(p) = 1$ (l'image de $v_C$ est donc de la forme $a^{-1}\mathbf{Z}$ pour un certain entier positif $a$).

Nous définissons le diviseur $\mathrm{div}(f)$ comme d'habitude, mais où les multiplicités des composantes irréductibles de $X_p$ sont mésurées avec les valuations normalisées par $v(p) = 1$. Utilisant l'isomorphisme venant de la courbe de Tate on voit que

$$v_C(f) = \min_n v_p(b_n) \tag{1.7}$$

et on obtient une forme méromorphe non-nul $(p^{-v_C(f)})|_C$ sur $C$. J'ai calculé, pour $X = X_0(p^2N)$ ($p \neq 2$ et premier à $N$), pour toute nouvelle forme $f$ de poids $k \geq 2$ les $v_C(f)$ et les $(p^{-v_C(f)})|_C$.

## 2 Méthode de calcul

Le problème consiste à comparer les développements en série de Fourier de $f$ en les diverses pointes de $X$, ce qu'on peut faire sur les nombres complexes. Signalons que ce problème pour $X_0(N)$ et pour $X_0(pN)$ est facile: dans le premier cas la courbe a bonne réduction en $p$ et dans le deuxième cas $X_p$ n'a que deux composantes irréductibles qui en plus sont permutées transitivementpar l'involution d'Atkin-Lehner $W_p$. Les problèmes commencent donc pour $X = X_0(p^2N)$. Dans ce cas $X_p$ a beaucoup de composantes irréductibles, mais les pointes ne se spécialisent que vers quatre d'entre eux. Ces quatre composantes forment deux ou trois orbites pour l'involution $W_{p^2}$.

Soit $Y := \overline{\mathrm{M}}(\Gamma(p), \Gamma_0(N))$ la courbe modulaire classifiant les courbes elliptiques munies d'une isogenie cyclique de degré $N$ et d'une base de la $p$-torsion. Le groupe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$

agit sur $Y$ et permute suffisamment les pointes pour résoudre le problème. On vérifie que $X$ est isomorphe au quotient du sous-groupe diagonal de $G$ opérant sur $Y$; soit $\pi: Y \to X$ le morphisme quotient. Soit $f$ une nouvelle forme sur $X$. Alors $\pi^*(f)$ est une forme sur $Y$ et soit $V$ la représentation de $G$ engendré par $\pi^*(f)$; notons $\chi$ le caractère de $V$. On démontre que $\chi$ est absolument irréductible.

On montre que les $v_C(f)$ ne dépendent que de $\chi$ et de $C$. Plus précisement: soit $C$ une composante irréductible vers laquelle ne se spécialisent pas les pointes 0 et $\infty$; soit $g$ dans $G$ tel que $g\infty$ se spécialise vers $C$, alors on a la formule:

$$v_C(f) = v_p\left(\sum \zeta_p^{-a}\chi\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g\left(\begin{smallmatrix}t_1 & 0\\ 0 & t_2\end{smallmatrix}\right)\right)\right) \tag{2.1}$$

où la somme est sur les $a$ dans $\mathbf{F}_p$ et les $t_1$ et $t_2$ dans $\mathbf{F}_p{}^*$, et où $\zeta_p$ est une racine $p$ème de l'unité.

Pour calculer les valeurs des $v_C(f)$, on utilise la table des caractères irréductibles de $G$. Dans cette table, on trouve la description suivante des représentations irréductibles de $G$. D'abord il y en a de dimension un; ce sont ceux qui se factorisent par le déterminant. Pour deux caractères $\alpha$ et $\beta$ de $\mathbf{F}_p{}^*$ on a un caractère $\pi(\alpha,\beta)$ de dimension $p+1$ obtenu par induction du sous-groupe de Borel de $G$; $\pi(\alpha,\beta)$ est irréductible si $\alpha \neq \beta$; le caractère $\pi(\alpha,\alpha)$ se décompose en deux caractères irréductibles $\pi^-(\alpha)$ et $\alpha\circ\det$. Finalement, pour $\Lambda$ un caractère de $\mathbf{F}_{p^2}{}^*$ tel que $\Lambda^p \neq \Lambda$ on a un caractère irréductible $\pi(\Lambda)$ de dimension $p-1$.

Le caractère $\chi$ de la représentation engendré par $\pi^*(f)$ est de la forme $\pi(\alpha,\alpha^{-1})$, $\pi^-(\beta)$ ou $\pi(\Lambda)$, avec $\beta^2 = 1$ et $\Lambda^p = \Lambda^{-1}$. Rappelons nous maintenant que $f$ est definie sur une extension finie $K$ de $\mathbf{Q}_p$. Cela veut dire que $\alpha$, qui est un caractère de $\mathbf{F}_p{}^*$ à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_P^*$, s'écrit comme $\tau^m$ pour $\tau: \mathbf{F}_p{}^* \to \mathbf{Q}_p^*$ le caractère de Teichmüller et $0 < m < (p-1)/2$, que $\beta = \tau^{(p-1)/2}$ et que $\Lambda = \tau_2^{(p-1)m}$ avec $\tau_2: \mathbf{F}_{p^2}{}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$ un des deux caractères fondamentaux et $0 < m < (p+1)/2$. Selon ces cas différents pour $\chi$ on trouve pour $v_C(f)$ dans (2.1), en calculant l'expression à droite:

(2.2)

| | |
|---|---|
| $\chi = \pi(\tau^m, \tau^{-m}),\quad 0 < m < (p-1)/2$ | $v_C(f) = -m/(p-1)$ |
| $\chi = \pi^-(\tau^{(p-1)/2})$ | $v_C(f) = -1/2$ |
| $\chi = \pi(\tau_2^{(p+1)m},\quad 0 < m < (p+1)/2$ | $v_C(f) = (1-m)/(p-1)$ |

Une autre expression qu'on rencontre et dont il faut connaitre la valuation $p$-adique est

$$\sum_x \alpha(x)\alpha(x-1)\zeta_p^x \tag{2.3}$$

avec $x \in \mathbf{F}_p$ différent de 0 et 1. Le principe général pour calculer les valuations $p$-adiques de telles expressions est de faire le calcul dans l'anneau $\overline{\mathbf{Z}}_p/p\overline{\mathbf{Z}}_p$ (où $\overline{\mathbf{Z}}_p$ est l'anneau des entiers dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$) et ensuite d'écrire l'expression comme une combinaison linéaire de sommes de Gauss.

# 3 Le cas général

Soit $f$ une nouvelle forme de poids, niveau et caractère quelconque. Dans ce cas aussi on aimerait connaitre les valuations $p$-adiques des développements en série de Fourier de $f$. Il est clair que ces valuations ne dépendent que de la représentation admissible irréductible $V$ de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ associée à $f$. Cette reprśentation $V$ peut être réalisée dans un certain espace de fonctions sur $\mathbf{Q}_p^*$ (le modèle de Kirillov). Pour résoudre le problème, il faut probablement connaitre la fonction correspondant à $f$, et des formules pour l'opération de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur cet espace.

Bas Edixhoven
Institut Mathématique
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France