Modular forms, Galois representations and local Langlands

Bas Edixhoven

Barcelona, 18–28 July 2001

Rennes, 02/07/2001.

The text that follows is informal and is not intended to be published, certainly not in its present form. It is based on the unfinished thesis by Jean-Baptiste Nortier (see the next page). This unfinished thesis has been edited by me, so that it can be used for this course. (I did some typographical work, corrected some errors and supplied some arguments and details.) Lack of time has prevented me to add examples, and to revise and give at least some details in the last two sections. I hope to be able to provide these during the course. The course will not follow this text in all details.

I am grateful to Jean-Baptiste Nortier for allowing me to use his texfiles in order to prepare these notes.

Bas Edixhoven.

Warning : This is an unfinished product, especially the last two sections have not been revised before these notes were printed.

Formes modulaires et représentations l-adiques

JB NORTIER

Toulouse le 26/06/2001,

Ce travail devait être à l'origine ma thèse de doctorat. Après plusieurs années de labeur, de multiples raisons m'ont conduit à arrêter ma thèse. Outre des raisons personnelles : le manque d'inspiration et de résultats, l'intervention plus que nécessaire mais trop importante à mon avis de mon directeur de thèse dans la rédaction et la résolution du sujet, et finalement un manque d'intérêt certain pour la chose mathématique. . . . Reste donc ce manuscrit habilement complété par mon directeur de thèse, espérons qu'il servira à éclaircir un peu les choses.

Je tiens à remercier Bas pour son aide, sa motivation et son courage. Ces longues années passées au sein de l'institut de recherche mathématique de Rennes, m'ont permis de rencontrer de nombreuses personnes qui à leur façon m'ont chacune beaucoup apporté, je les remercie toutes.

Bonne lecture, Jean-Baptiste Nortier.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Notations et conventions

On note $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{f}}$ les adèles finies sur $\mathbb{Q}$. Pour p un nombre premier, on utilise la valeur absolue $|x|_p = p^{-\mathrm{val}_p(x)}$ sur $\mathbb{Q}_p$. On note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Par un Frobenius en une place finie p, que l'on notera Frob_p ou ϕ_p, on entend un Frobenius arithmétique, i.e., un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ agissant sur le corps résiduel de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ par l'élévation à la puissance p-ème. On fixe $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Z}}$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour tout p premier, on fixe un morphisme de $\overline{\mathbb{Z}}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, on note D_p le sous-groupe de décomposition en p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, et I_p le groupe d'inertie en p ; on identifiera D_p à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, noté G_p. On notera W_p le groupe de Weil local en p : c'est le sous-groupe de D_p des éléments dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ est une puissance entière de Frob_p. On fixe le signe de l'isomorphisme de la théorie des corps de classes entre $\mathbb{Q}_p^*$ et W_p^{ab}, $\widehat{\mathbb{Q}_p^*}$ et $\mathrm{Gal}^{\mathrm{ab}}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ en choisissant d'envoyer les uniformisantes sur les inverses des Frobenius. Par cet isomorphisme, pour tout premier $l \neq p$, le caractère cyclotomique l-adique χ_l de W_p vers $p^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}_l^*$ correspond à la valeur absolue $|\ |_p$. Par caractère, on entend caractère continu, et l'on désigne par une même lettre un caractère de G_p et le caractère correspondant de $\mathbb{Q}_p^*$. Étant donné ε un caractère de Dirichlet, on désigne encore par ε le caractère induit sur $\mathbb{Q}_{>0}^*\backslash\mathbf{A}^{\mathrm{f},*}$, et sur $\mathbb{Q}_p^*$, pour tout nombre premier p.

1.2 Le problème

Soient N et k deux entiers, $N \geq 1$ et $k \geq 2$, et soit l premier. Considérons f une forme modulaire parabolique à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de niveau N, de poids k, et de caractère ε, nouvelle et propre pour les opérateurs de Hecke. Pour n entier, $n \geq 1$, on note a_n la valeur propre de f pour l'opérateur de Hecke T_n. On sait associer à la forme modulaire f, une représentation galoisienne l-adique continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Cette représentation, notée ρ_f, est non ramifiée en dehors de Nl, et vérifie pour tout p premier ne divisant pas Nl :

$$\mathrm{trace}(\rho_f(\mathrm{Frob}_p)) = a_p \ \text{ et } \ \det(\rho_f(\mathrm{Frob}_p)) = p^{k-1}\varepsilon(p).$$

On se pose la question naturelle de savoir ce qu'il advient en les entiers p premier distinct de l divisant le niveau N de la forme modulaire considérée.

Pour répondre, on a besoin de la représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})$ que l'on sait associer à la forme modulaire f. Cette représentation, notée π_f, est le produit tensoriel restreint, $\pi_f = \otimes_p \pi_{f,p}$, où

p parcourt l'ensemble des nombre premiers et où chaque facteur local $\pi_{f,p}$ est une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour p premier ne divisant pas le niveau N de la forme modulaire f, la représentation π_p est la représentation principale non ramifiée $\pi(\alpha, \beta)$, où α et β sont deux caractères non ramifiés de $\mathbb{Q}_p^*$, vérifiant :

$$\alpha.\beta(p^{-1}) = p^k \varepsilon(p) \text{ et } p^{-1}\alpha(p^{-1}) + \beta(p^{-1}) = a_p.$$

En conséquence, les représentations $\pi_{f,p}$ et la semisimplifiée $\rho_{f,p}^{\mathrm{ss}}$ de $\rho_{f,p} := \rho_f|_{\mathrm{D}_p}$ se déterminent l'une de l'autre, en p premier ne divisant pas Nl.

Ce résultat reste vrai pour tous les entiers p premier distincts de l, d'après Deligne [De3] (voir aussi [Ca1]). (Pour $p = l$, c'est faux : $\pi_{f,p}$ ne détermine plus $\rho_{f,p}^{\mathrm{ss}}$; voir [Sa] pour ce qui est vrai dans ce cas.) On connaît les classifications des représentations l-adiques de dimension 2 de D_p, et des représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. En leurs termes, la correspondance obtenue pour $p \neq 2$ est la suivante :

représentation locale $\pi_{f,p}$	principale $\pi(\alpha, \beta)$	spéciale $\mathrm{Sp}(\alpha)$	supercuspidale $r_{K,\alpha}$
représentation locale $\rho_{f,p}^{\mathrm{ss}}$	décomposée $\alpha\|\ \|_p^{-1} \oplus \beta$	indécomposable $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha\|\ \|_p^{-1} \end{smallmatrix}\right)$	irréductible $\mathrm{ind}_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}_p}}(\alpha.\|\ \|_p^{-1/2})$
conducteur	$\mathrm{c}(\alpha)\mathrm{c}(\beta)$	$\mathrm{c}(\alpha^2) \cap p\mathbb{Z}_p$	$\mathrm{D}_{K/\mathbb{Q}_p}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{c}(\alpha))$

Dans les termes de Deligne dans [De1, 3.2.], il s'agit de la correspondance de Tate. Correspondance caractérisée en termes d'égalité de facteurs L et ϵ. Le cas où $\pi_{f,p}$ est de la série principale avait déjà été traité par Langlands dans [LL]. Il existe dans le cas où $p = 2$, en plus des représentations intervenant ci-dessus, des représentations supercuspidales extraordinaires et des représentations galoisiennes locales extraordinaires. Par des méthodes différentes, Carayol dans [Ca1] et Nyssen dans [Ny] traitent le cas des représentations extraordinaires. Leurs résultats montrent que ces cas s'insèrent dans la correspondance ci-dessus. Une conséquence de ce résultat est : soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, $E = E_f$ pour une certaine forme modulaire parabolique nouvelle, alors les fonctions L de E et de f sont égales et le conducteur de E est égal au niveau de f. (L'égalité des fonctions L est facile, celle du conducteur et du niveau ne l'est pas du tout.) Notons que récemment, Harris et Taylor ([HaTa]), et ensuite Henniart ([He]), ont obtenus des généralisations de ce type de résultats, suffisantes pour en déduire la conjecture de Langlands locale pour GL_n pour tout n sur des corps locaux de caractéristique zéro (voir [Ca2]). Pour d'autres résultats dans ce domaine on pourra consulter les références dans [Ca2], en particulier [Boy], [Ba], et bien sûr [Laf].

L'objectif est de cette thèse est de redémontrer le résultat de Deligne, à savoir que $\pi_{f,p}$ détermine $\rho_{f,p}$ pour tout p différent de l. La preuve que nous donnons est, au fond, la même que celle de Deligne et de Carayol, mais nous essayons de minimiser les prérequis automorphes. En particulier, nous travaillons toujours en niveau fini en dehors de p, et nous détaillons plus le passage par les formes automorphes sur l'algèbre de quaternions qui apparaît naturellement. Nous utilisons la description donnée dans [KaMa] de certains modèles de courbes modulaires, ainsi que certains résultats de [JaLa].

La thèse est organisée comme suit :

- Le premier chapitre est la présente introduction ;
- Dans le deuxième chapitre, on rappelle quelques généralités sur les notions de courbe elliptique, de problème de modules et de courbe modulaire. On donne aussi les définitions de formes modulaires et d'opérateurs de Hecke. Étant donnée une forme modulaire parabolique et propre, on construit la représentation galoisienne ainsi que la représentation admissible qui lui sont associées. Enfin on donne une classification de certaines représentations de G_p et une classification de représentations admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.
- Le troisième chapitre consiste en la description d'un modèle régulier de la courbe modulaire $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}}$, et de diverses actions de groupes sur ce modèle. On rappelle le formalisme des cycles évanescents, et la construction de la suite exacte des cycles évanescents, puis on explique en quoi l'utilisation et l'étude de ces suites exactes permet d'avancer dans la démonstration du théorème principal.
- L'objet du quatrième chapitre est l'étude de la structure de la cohomologie de la fibre spéciale ;
- Dans le cinquième chapitre, on étudie l'espace des cycles évanescents. Par des calculs de l'action des opérateurs de Hecke, on obtient une correspondance entre des représentations irréductibles admissibles d'une algèbre de quaternions $B(\mathbb{Q}_p)^*$ et les représentations admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ intervenant dans l'espace des cycles évanescents.
- L'objectif du sixième chapitre est de démontrer l'injectivité de la correspondance établie au chapitre précédent ;
- Enfin, le septième chapitre consiste en la démonstration des résultats précédemment annoncés.

2 Généralités

On rappelle dans ce chapitre quelques généralités sur les notions de courbe elliptique, de problème de modules et de courbe modulaire (2.1). On donne aussi les définitions de formes modulaires (2.2) et d'opérateurs de Hecke (2.3). Étant donnée une forme modulaire parabolique et propre, on construit la représentation galoisienne ainsi que la représentation admissible qui lui sont associées (2.4, 2.19). Enfin on donne une classification de certaines représentations de G_p et une classification de représentations admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (2.8, 2.11).

2.1 Courbes elliptiques et courbes modulaires

Une courbe elliptique E sur un schéma S est un S-schéma propre et lisse de dimension relative 1 à fibres géométriquement connexes de genre 1 muni d'une section $e\colon S \to E$ du morphisme structural $\pi\colon E \to S$. On montre qu'une courbe elliptique E sur S est munie d'une unique structure de schéma en groupes sur S admettant e comme section unité (voir [KaMa, Chap.2] par exemple). On note (Ell) la catégorie dont les objets sont les courbes elliptiques $\pi\colon E \to S$ et les flèches les diagrammes cartésiens compatibles aux sections unité :

$$\begin{array}{ccccc} & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \\ \pi_1 & \downarrow & \square & \downarrow & \pi_2 \\ & S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 & \end{array}$$

Si S est un schéma on note (Ell_S) la catégorie des courbes elliptiques sur les S-schémas. Si S est affine, i.e., $S = \mathrm{Spec}(R)$, on note souvent (Ell_R) pour (Ell_S). On appelle problème de modules pour les courbes elliptiques tout foncteur $\mathcal{P}$ contravariant de la catégorie des courbes elliptiques (Ell) dans la catégorie des ensembles. Étant donné E/S un objet de (Ell), un élément de $\mathcal{P}(E/S)$ est appelé structure de niveau $\mathcal{P}$ sur E/S. Pour E/S une courbe elliptique et N un entier, on note $E[N]$ le noyau de la multiplication par N de E/S dans E/S. Si $P \in E(S)$, on note $[P]$ le diviseur de Cartier effectif de E associé à P ([KaMa, Chap.1]). Voici quelques problèmes de modules classiques ([KaMa, Chap.1&3]) :

1. Une $\Gamma(N)$-structure sur E/S appelée aussi base de Drinfeld sur $E[N]$ est la donnée d'un morphisme de groupes $\phi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \to E[N](S)$ qui engendre $E[N]$, i.e., $E[N] = \sum_{(a,b)}[\phi(a,b)]$ (somme sur les a et b dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) comme diviseur de Cartier effectif de E. Les points $P = \phi(1,0)$ et $Q = \phi(0,1)$ forment la base de Drinfeld de E/S associée à ϕ. Si N est inversible dans S, cela revient à se donner un isomorphisme $\phi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2_S \to E[N]$. Si de plus S est connexe, cela revient à se donner

un isomorphisme de groupes $\phi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \simeq E[N](S)$. Le problème de modules associé aux $\Gamma(N)$-structures est noté $[\Gamma(N)]$.

2. Une $\Gamma_1(N)$-structure sur E/S, est la donnée d'un morphisme α de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ vers $E[N](S)$ tel que $\sum_a [\alpha(a)]$ est un sous-schéma en groupes de E. Une telle structure α est déterminée par le point $P = \alpha(1)$. Si N est inversible sur S, un point P dans $E(S)$ induit une $\Gamma_1(N)$-structure si et seulement si, pour tout point géométrique x de S, $P(x)$ est d'ordre N dans $E(x)$. Le problème de modules associé aux $\Gamma_1(N)$-structures est noté $[\Gamma_1(N)]$.
3. Une $\Gamma_0(N)$-structure sur E/S est la donnée d'une isogénie de degré N $f\colon E \to E'$ sur S cyclique au sens où localement f.p.p.f. sur S le noyau $\mathrm{Ker} f$ admet un générateur P. Cela revient à se donner un sous-schéma fermé en groupes G de $E[N]$ sur S cyclique localement libre de rang N sur S. Le problème de modules associé aux $\Gamma_0(N)$-structures est noté $[\Gamma_0(N)]$.

Un problème de modules $\mathcal{P}$ est dit représentable s'il l'est comme foncteur, i.e., s'il existe une courbe elliptique universelle munie d'une structure de niveau universelle : $\mathbf{E}_{\mathrm{univ}} \xrightarrow{\pi_{\mathrm{univ}}} \mathcal{M}(\mathcal{P})$ vérifiant pour toute courbe elliptique E/S, $\mathcal{P}(E/S) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ell})}(E/S, \mathbf{E}_{\mathrm{univ}}/\mathcal{M}(\mathcal{P}))$ fonctoriellement. Si $\mathcal{P}$ est représentable, le schéma $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ représente alors le foncteur de la catégorie des schémas dans celle des ensembles qui à un schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples $(E/S, \alpha)$ où E/S est une courbe elliptique sur S et α une structure de niveau $\mathcal{P}$ sur E/S (voir [KaMa, Chap.4]). Le schéma $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ est appelé schéma de modules associé au problème de modules $\mathcal{P}$. Seulement, nombres problèmes de modules ne sont pas représentables (considérer $\Gamma(1)$ par exemple). Un problème de modules $\mathcal{P}$ est dit relativement représentable si pour toute courbe elliptique E/S, le foncteur de la catégorie des S-schémas dans les ensembles défini par : $T \to \mathcal{P}(E_T/T)$ est représentable par un S-schéma noté alors $\mathcal{P}_{E/S}$. Un tel problème de modules est alors dit affine, fini, plat, étale..., si tous les morphismes de schémas $\mathcal{P}_{E/S} \to S$ sont affines, finis, plats, étales...([KaMa, Chap.4] pour plus de détails). Par exemple, les problèmes de modules $[\Gamma(N)]$, $[\Gamma_1(N)]$ et $[\Gamma_0(N)]$ sur (Ell_R) sont relativement représentables finis, étales si N est inversible dans R ([KaMa, Chap.3]). Enfin, un problème de modules $\mathcal{P}$ est dit rigide si tout couple $(E/S, \alpha)$, où $\alpha \in \mathcal{P}(E/S)$, n'admet pas d'automorphisme non trivial induisant l'identité sur S. Cette condition est clairement nécessaire à la représentabilité du problème de modules $\mathcal{P}$ et est suffisante dans le cas où ce problème de modules est relativement représentable et affine ([KaMa, Chap.4]). On obtient alors aisément que le problème de modules $[\Gamma(N)]$ sur (Ell_R) est représentable si $N \geq 3$ est inversible dans R. Le problème de modules $[\Gamma_1(N)]$ sur (Ell_R)

est représentable si $N \geq 4$ est inversible dans R. Leur représentant, respectivement, $Y(N) = \mathcal{M}([\Gamma(N)])$ et $Y_1(N) = \mathcal{M}([\Gamma_1(N)])$ sont alors des courbes affines lisses sur R. On voit aussi facilement que le problème de modules $[\Gamma_0(N)]$ n'est jamais représentable (il n'y a pas rigidité : l'automorphisme -1 de E/S agit trivialement sur toute $\Gamma_0(N)$-structure). Pour pallier à ce problème, on peut associer à un problème de modules relativement représentable affine sur (Ell_R) un R-schéma noté $\mathrm{M}(\mathcal{P})$ appelé schéma de modules grossier associé au problème de modules $\mathcal{P}$. Ce R-schéma coïncide avec le schéma de modules $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ si le problème de modules $\mathcal{P}$ est représentable (voir [KaMa, Chap.5]). L'exemple classique de schéma grossier de modules sur R est la droite des j-invariants $\mathrm{M}([\Gamma(1)])_R = \mathrm{Spec}(R[j])$.

Pour tout problème de modules $\mathcal{P}$ relativement représentable affine sur (Ell_R), on obtient un morphisme canonique de R-schémas de $\mathrm{M}(\mathcal{P})$ dans $\mathrm{Spec}(R[j])$. Ce morphisme est par ailleurs fini dès que $\mathcal{P}$ est fini. Ce morphisme permet avec quelques hypothèses de plus sur R et $\mathcal{P}$ de compactifier le R-schéma $\mathrm{M}(\mathcal{P})$ sur $\mathbf{A}^1_R$ en un R-schéma noté $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{P})$ sur $\mathbf{P}^1_R$. Plus précisément, on suppose $\mathcal{P}$ relativement représentable fini sur (Ell_R) et normal au voisinage de l'infini. On étend alors le $\mathbf{A}^1_R$-schéma $\mathrm{M}(\mathcal{P})$ en un $\mathbf{P}^1_R$-schéma $\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{P})$ en normalisant au voisinage de l'infini. On appelle schéma des cusps ou pointes noté $\mathrm{Cusps}(\mathcal{P})$ le R-schéma fini réduit $(\overline{\mathrm{M}}(\mathcal{P}) - \mathrm{M}(\mathcal{P}))^{\mathrm{red}}$ ([KaMa, Chap.8.6]). On peut interpréter modulairement ces pointes en terme de courbes elliptiques généralisées ([DeRa, Part.II]).

Il faut noter que si on travaille sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, on retrouve les définitions plus originelles de certaines courbes modulaires ([Ko, Chap.3]). Par exemple, notons $\mathbf{H}$ le demi-plan de Poincaré, i.e., l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit naturellement sur $\mathbf{H}$; un élément $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissant par : $z \mapsto \gamma z = (az+b)/(cz+d)$. Pour N un entier supérieur à 1, on définit le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ comme l'ensemble des éléments $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $c = 0 \pmod N$. On a alors $\mathrm{M}([\Gamma_0(N)])(\mathbb{C}) \simeq \Gamma_0(N)\backslash\mathbf{H}$, et de même les compactifications sont en bijection. En fait si on regarde la structure analytique complexe de $X_0(N)(\mathbb{C})$, notée $X_0(N)^{\mathrm{an}}$, on a $X_0(N)^{\mathrm{an}} \simeq \overline{\Gamma_0(N)\backslash\mathbf{H}}$.

2.2 Formes modulaires

Soient R un anneau, k et N deux entiers tels que $k \geq 2$ et $N \geq 5$ inversible dans R. On note $Y_1(N)$ la courbe modulaire $\mathcal{M}([\Gamma_1(N)]$ sur $\mathrm{Spec}(R)$ et $X_1(N)$ sa compactification. On appelle j le morphisme naturel de $Y_1(N)$ dans $X_1(N)$. On dispose sur $Y_1(N)$ d'une courbe elliptique universelle $\mathbf{E}$ muni d'une $\Gamma_1(N)$-structure universelle α. Sur $Y_1(N)$, on considère le faisceau inversible $\underline{\omega} = e^*\Omega^1_{\mathbf{E}/Y_1(N)}$, i.e., le faisceau des différentielles de $\mathbf{E}$ sur $Y_1(N)$ invariante par translation. On étend alors le faisceau $\underline{\omega}$ à $X_1(N)$ ([KaMa, Chap.10.13]). Le R-module des formes modulaires sur R de niveau N et de poids k noté $\mathrm{M}(N,k)_R$ est par définition $\mathrm{H}^0(X_1(N),\underline{\omega}^{\otimes k})$. On peut alors voir une telle forme modulaire comme une loi qui associe à chaque couple $(E/S/R,\alpha)$ d'une courbe elliptique muni d'une $\Gamma_1(N)$-structure sur un R-schéma une section globale du faisceau inversible $\underline{\omega}^{\otimes k}_{E/S}$, de façon compatible au changement de base, et dont les q-développements sont entiers ([Ka2, Chap.1]). Pour N quelconque, i.e., dans les cas $N < 5$, inversible dans R, on travaille sur des courbes modulaires $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N),\Gamma(M))$ sur $R[1/M]$ avec $M > 2$, on considère les modules des sections globales invariantes sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ du faisceau $\underline{\omega}$, puis on recolle.

On définit aussi le R-module des formes modulaires paraboliques ou cuspidales de niveau N et de poids k noté $\mathrm{M}^0(N,k)_R$ comme l'ensemble des sections globales sur $X_1(N)$ du faisceau $\underline{\omega}^{\otimes k}(-\mathrm{Cusps})$. Via l'isomorphisme classique $\underline{\omega}^{\otimes 2} \simeq \Omega^1_{X_1(N)}(\mathrm{Cusps})$ ([KaMa, Chap.10,13], [Ka2, Chap.1]), on obtient en poids deux un isomorphisme canonique entre $\mathrm{M}^0(N,2)_R$ et $\mathrm{H}^0(X_1(N),\Omega_{X_1(N)})$.

Le groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ agit naturellement sur $[\Gamma_1(N)]$: a dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ agit en envoyant $(E/S,\alpha)$ sur $(E/S,a\alpha)$. Cette action induit une action de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ sur $X_1(N)$ puis sur $\mathrm{M}(N,k)_R$ que l'on note $\langle a\rangle^*$. Soit ε un caractère de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ à valeurs dans R^*. Une forme modulaire sur R de niveau N et de poids k est dite de caractère ε si on a $\langle a\rangle^*.f = \varepsilon(a)f$ pour tout a dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On note $\mathrm{M}(N,k,\varepsilon)_R$ l'ensemble de ces formes.

Si on travaille sur $\mathbb{C}$, on retrouve les notions de formes modulaires plus concrètes et classiques sur $\overline{\Gamma_0(N)\backslash\mathbf{H}}$ et $\overline{\Gamma_1(N)\backslash\mathbf{H}}$ ([Ko, Chap.3]). Notons que si R est une $\mathbb{Z}[\zeta_N]$-algèbre, on définit un analogue de la notion développement en série aux pointes de la situation sur $\mathbb{C}$. Il consiste à évaluer $f \in M(N,k)_R$ sur les courbes elliptiques de Tate munies des $\Gamma_1(N)$-structures. On obtient alors ce que l'on appelle les q-développements de f qui appartiennent à $R[[q]]$. Si les termes constants de tous les q-développements de f sont nuls, on dit que f est une forme parabolique ([DeRa, VII.3],[Ka2, Chap.1]).

Supposons que R soit un corps K. On définit sur l'espace des formes modulaires de poids k et de niveau N sur K, une famille d'opérateurs appelés opérateurs de Hecke. Plus précisément pour tout $l \geq 1$ entier, on définit un opérateur, i.e., un endomorphisme de $M(N,k)_K$, noté T_l^*. La sous-K-algèbre de $\mathrm{End}_K(M^0(N,k)_K)$ engendrée par ces opérateurs T_l^* et les opérateurs $\langle a\rangle^*$ pour $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ est appelée algèbre de Hecke, et on la note $\mathbf{T}$. Elle est commutative de dimension finie en tant que K-espace vectoriel. Une référence classique pour la construction de ces opérateurs est

[Ka2, Chap.1.11]. Si on se place sur $\overline{\mathbb{Q}}$, l'action de T_l^* sur $f \in M(N,k)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est donnée par la formule classique : $T_l^*(f)(E/\overline{\mathbb{Q}},\alpha) = \frac{1}{l}\sum_\phi \phi^* f(E'/\overline{\mathbb{Q}},\phi\alpha)$ ϕ parcourant l'ensemble des isogénies de degré l sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de source E : $\phi\colon E \to E'$ et telles que $\mathrm{Ker}\phi \cap \mathrm{Im}\alpha = \{O\}$. Si on travaille aux pointes, on retrouve les formules classiques pour l'action de T_l^* sur les q-développements ([Ka2, Chap.1.11]). Une forme modulaire f de poids k, de niveau N et de caractère ε est dite propre si elle est simultanément vecteur propre pour tous les opérateurs T_l^*. Une forme modulaire parabolique propre non nulle a un coefficient a_1 de son q-développement à l'infini non nul, et s'il vaut 1 on parle alors de forme propre normalisée. Si M divise strictement N, on associe à chaque diviseur d de N/M un morphisme naturel de $\mathrm{M}(M,k)_K$ dans $\mathrm{M}(N,k)_K$ provenant du morphisme de $X_1(N)$ dans $X_1(M)$ associant à une classe (E,P) la classe $(E/\langle MdP\rangle, dP)$. Une forme modulaire propre normalisée est une nouvelle forme si elle n'est pas dans le sous espace engendré par les images de $\mathrm{M}(M,k)_K$ dans $\mathrm{M}(N,k)$ pour tout M divisant strictement N par les morphismes précédents. Sur $\mathbb{C}$, on a les résultats classiques de la théorie d'Atkin-Lehner de décomposition des espaces $M^0(N,k)_{\mathbb{C}}$ ([AtLe], [La], [DiIm, Part.1]).

2.3 Correspondances de Hecke

Soient N un entier, $N > 4$ et l un nombre premier. On note S le schéma affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N])$ et $Y_1(N)$ la courbe modulaire associée au problème de modules $[\Gamma_1(N)]$ sur S, et $X_1(N)$ sa compactification. On considère la courbe $A(N,l)$ définie comme la courbe modulaire associée au problème de modules classifiant les courbes elliptiques $E/T/S$ munies d'une $\Gamma_1(N)$-structure $\alpha\colon \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to E(T)$ et d'une structure pour $\Gamma_0(l)$, $f\colon E \to E'$ telles que $\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{O_E\}$. On considère les morphismes suivants :

$$\begin{array}{rccc} s: & A(N,l) & \longrightarrow & Y_1(N) \\ & (E,\alpha,f\colon E \to E') & \longmapsto & (E,\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t: & A(N,l) & \longrightarrow & Y_1(N) \\ & (E,\alpha,f\colon E \to E') & \longmapsto & (E',\alpha' = f\circ\alpha) \end{array}$$

Ces deux morphismes sont finis localement libres, et étales sur $S[1/l]$ et s'étendent naturellement aux compactifications. Ils induisent une correspondance T_l sur les diviseurs de $X_1(N)$, et un endomorphisme T_l sur la jacobienne $J_1(N)$ de $X_1(N)$. Par exemple sur un point $P = (E,\alpha)$ de $Y_1(N)(\overline{\mathbb{Q}})$, on a $T_l(P) = t_* \circ s^*(P) = \sum_f (E' = f(E), f\circ\alpha)$ la somme s'effectuant sur les l-isogénies de source E. On obtient aussi naturellement une action T_l^* sur $\mathrm{H}^0(X_1(N),\Omega^1_{X_1(N)})$ par $s_* \circ t^*$ où s_* est le morphisme trace de :

$$s_*\colon \mathrm{H}^0(\overline{A}(N,l), \Omega^1_{A(N,l)}) \to \mathrm{H}^0(X_1(N), \Omega^1_{X_1(N)}).$$

Notons que l'isomorphisme $M^0(N,2) \simeq \mathrm{H}^0(X_1(N), \Omega_{X_1(N)})$ (cf 2.2) est un isomorphisme compatible aux opérateurs de Hecke ([Gr2, Chap.3], [Ka2, Chap.I]). Ceci explique le facteur $1/l$ dans la définition de T_l^* sur $M^0(N,2)$.

Enfin, si on se place sur $\mathbf{C}$, on note j le morphisme naturel de $Y_1(N)$ dans $X_1(N)$, et $\pi\colon \mathbf{E} \to Y_1(N)$ la courbe elliptique universelle. On considère sur $Y_1^{\mathrm{an}}(N)$ le faisceau $\mathcal{F}_k = \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{R}^1\pi_*\mathbb{Z})$ et sur $X_1(N)$ le faisceau $j_*\mathcal{F}$. De façon analogue à la situation précédente on a une structure de module de Hecke sur les $\mathrm{H}^i(X_1(N), j_*\mathcal{F}_k)$ avec $i \geq 0$.

On sait construire un morphisme injectif de $M^0(N,k)_{\mathbb{C}}$ identifié au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{H}^0(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \underline{\omega}^{\otimes k-2} \otimes \Omega^1_{X_1(N)})$ dans $\mathrm{H}^1(X_1(N)_{\mathbb{C}}, j_*(\mathcal{F}_k) \otimes \mathbb{C})$. Et on a mieux par l'isomorphisme de Shimura ([De1, §2.10] et [DiIm, 12.2]) :

$$M^0(N,k)_{\mathbb{C}} \oplus \overline{M^0(N,k)_{\mathbb{C}}} \simeq \mathrm{H}^1(X_1(N)_{\mathbb{C}}, j_*(\mathcal{F}_k)_{\mathbb{C}}).$$

Cet isomorphisme préserve les actions des opérateurs de Hecke.

2.4 Représentation galoisienne associée à une forme modulaire

Soit N un entier strictement positif, $k \geq 2$ un entier, l un nombre premier, ε un caractère de Dirichlet modulo N à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}^*$. Soit f une forme modulaire cuspidale, propre pour tous les opérateurs de Hecke T_q, de type (N,k,ε) à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Notons K_f l'extension (finie) de $\mathbb{Q}$ engendrée par les valeurs propres a_q de f pour les opérateurs de Hecke T_q, et les nombres $\varepsilon(x)$, x parcourant $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Appelons λ une place de K_f au dessus de l. On sait associer à f une représentation galoisienne continue ρ_f de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{GL}_2(K_{f,\lambda})$, continue pour la topologie galoisienne sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et la topologie l-adique sur $\mathrm{GL}_2(K_f)$. La représentation ρ_f est non ramifiée en dehors de Nl. Soit q un nombre premier ne divisant pas Nl, et soit Frob_q un Frobenius arithmétique en q, i.e., un élément du groupe de décomposition $D_q \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_q}/\mathbb{Q}_q)$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ est le Frobenius $x \mapsto x^q$. Le polynôme caractéristique de $\rho_f(\mathrm{Frob}_q)$ est alors : $X^2 - a_qX + \varepsilon(q)q^{k-1}$ où a_q est la valeur propre de f pour l'opérateur T_q (on ne sait pas en poids $k > 2$ si $\rho_f(\mathrm{Frob}_q)$ est semi-simple). Ce qui nous intéresse ici est le comportement de la représentation ρ_f restreint aux groupes de décomposition et d'inertie en p divisant N et différent de l.

Rappelons rapidement la construction de la représentation ρ_f. Comme on suppose seulement que f est une forme propre (et non nécessairement une nouvelle forme) on peut supposer $N > 4$. Soient $Y_1(N) = \mathcal{M}(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}}$ et $X_1(N) = \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}}$ sa compactification. On note j le morphisme naturel de $Y_1(N)$ dans $X_1(N)$, et $\pi\colon \mathbf{E} \to Y_1(N)$ la courbe elliptique universelle. On considère sur $Y_1(N)_{\mathrm{et}}$ le faisceau l-adique $\mathcal{F}_k = \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{R}^1\pi_*\mathbb{Q}_l)$ et sur $X_1(N)_{\mathrm{et}}$ son image directe $j_*\mathcal{F}_k$. On montre que l'action de l'algèbre de Hecke $\mathbf{T} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$ sur $\mathrm{H}^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, j_*\mathcal{F}_k)^\vee$ fait de ce $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel un $\mathbf{T}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_l$ module libre de rang 2. En considérant alors le morphisme de $\mathbf{T}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_l$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ induit par le morphisme associé à f de $\mathbf{T}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ qui a T_q associe la valeur propre de f correspondante a_q, $V_f = \mathrm{H}^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, j_*\mathcal{F}_k)^\vee \otimes_{\mathbf{T}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ est alors un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension deux muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$: $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur $\mathrm{H}^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, j_*\mathcal{F}_k)^\vee$ par $((\mathrm{Id} \times \mathrm{Spec}(\sigma^{-1}))^*)^\vee$. On obtient ainsi la représentation ρ_f.

Remarque 2.5. *Dans le cas du poids deux, i.e., $k = 2$, on peut construire la représentation ρ en utilisant les actions naturelles du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *et de l'algèbre de Hecke sur le module de Tate l-adique associé à la jacobienne $J_1(N)_{\mathbb{Q}}$ de $X_1(N)_{\mathbb{Q}}$. La non ramification de la représentation ρ_f en q ne divisant pas Nl est une conséquence directe de la bonne réduction de $X_1(N)$ en un tel q.*

Remarque 2.6. *En poids supérieur, on utilise en général la cohomologie parabolique (i.e., l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie classique) de $\mathcal{F}_k$ sur $Y_1(N)$ dans la construction précédente, i.e.,* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{par}}(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_k)$ *au lieu du* $\mathrm{H}^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, j_*\mathcal{F}_k)$. *En fait, ces deux modules sont naturellement isomorphes. Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1_c(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_k) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_k) \\ f_1 \searrow & & \nearrow f_2 \\ & \mathrm{H}^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, j_*\mathcal{F}_k) & \end{array}$$

avec f_1 surjectif provenant de la suite exacte :

$$0 \to j_!\mathcal{F}_k \to j_*\mathcal{F}_k \to \mathrm{Coker} \to 0,$$

et f_2 injectif provenant de la suite spectrale de Leray pour le morphisme j.

Remarque 2.7. *Le déterminant de la représentation ρ_f construite ci-dessus est le caractère de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *égal à $\varepsilon\chi_l^{k-1}$ par le théorème de Chebotareff ([Se1, Chap.I.2.2]).*

2.8 Classification de représentations du groupe G_p

Soient p et l deux nombres premiers distincts. Soit ρ une représentation continue du groupe de Galois G_p de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Alors il existe une extension finie L de $\mathbb{Q}_l$ telle que l'image de ρ soit contenue dans $\mathrm{GL}_2(L)$. Pour cela, on utilise l'argument habituel, c'est à dire, que l'image du groupe d'inertie sauvage, intersecté avec $1 + l\mathrm{M}_2(\overline{\mathbb{Z}}_l)$, est triviale, et que le groupe d'inertie modérée ainsi que $\hat{\mathbb{Z}}$ sont topologiquement engendrés par un élément.

On considère la condition FS : Pour tout caractère α de G_p tel que $\rho \otimes \alpha$ soit non ramifiée, $(\rho \otimes \alpha)(\mathrm{Frob}_p)$ est diagonalisable.

Remarque 2.9. *La condition FS est en fait ce qu'on appelle la F-semi-simplicité. Si ρ est de la forme ρ_f (voir 2.4) alors la condition FS est connue en poids $k = 2$ et conjecturée en poids $k > 2$. Il existe aussi un procédé fonctoriel de F-semi-simplification des représentations ([De2, §8.], [Se1, Chap.I.2.3]), dont nous ne nous servirons pas.*

Théorème 2.10. *Soient p et l deux nombres premiers distincts. Soit ρ une représentation du groupe de Galois G_p de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ vérifiant la condition FS ci-dessus. On a alors trois possibilités distinctes pour la représentation ρ :*

i) ρ est décomposable, alors :

$$\rho \simeq \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des caractères de G_p ;

ii) ρ est indécomposable réductible, alors :

$$\rho \simeq \begin{pmatrix} \alpha\chi_l & * \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

où α est un caractère de G_p et χ_l est le caractère l-adique cyclotomique de G_p ;

iii) ρ est irréductible, alors il y a deux possibilités distinctes :

- *$\rho \simeq \mathrm{ind}_{G_K}^{\mathrm{G}_p}(\alpha)$ où K est une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$ et α un caractère du groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ vérifiant $\alpha \neq \alpha^\sigma$ où σ est l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$;*
- *dans le cas $p = 2$, il existe des représentations irréductibles qui ne sont pas du type précédent, elles sont dites extraordinaires.*

Preuve. Esquissons une preuve de ce théorème. On note $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{mr}}$ l'extension maximale modérément ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On considère les groupes de Galois suivants : les groupes d'inertie $I = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$, d'inertie modérée $I^{\mathrm{m}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{mr}}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ et d'inertie sauvage $I^{\mathrm{s}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{mr}})$. On sait que le groupe d'inertie sauvage I^{s} est un pro-p-groupe, le groupe d'inertie modérée $I^{\mathrm{m}} = \varprojlim_r \mathbb{F}_{p^r}^* = \varprojlim_{p\nmid n} \mu_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est un groupe pro-cyclique, on notera σ un générateur topologique de I^{m}. Enfin le groupe quotient $\mathrm{G}_p/I^{\mathrm{s}}$ est égal au produit semi-direct de I^{m} et $\widehat{\mathbb{Z}}$, avec la relation $F\sigma F^{-1} = \sigma^p$ où F est le générateur topologique de $\widehat{\mathbb{Z}}$ correspondant au Frobenius $x \mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour plus de détails voir [Se2, Chap.1] où [De2, §2.].

Tout d'abord, on montre qu'il existe une extension finie K de $\mathbb{Q}_l$ telle que, si on note O_K les entiers de K et k son corps résiduel, la représentation ρ soit équivalente à une représentation dont l'image est dans $\mathrm{GL}_2(O_K)$. Par suite $\rho(I^{\mathrm{s}})$ est inclus dans $\mathrm{GL}_2(k)$ et donc est fini.

Passons à la démonstration du théorème. Supposons la représentation ρ réductible et indécomposable, i.e., $\rho \simeq \left(\begin{smallmatrix}\alpha & * \\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)$ où α et β sont deux caractères de G_p. Quitte à tordre la représentation ρ par β^{-1}, on peut supposer $\beta = \chi_{\mathrm{triv}}$. Nécessairement $\rho_{|I^{\mathrm{s}}}$ est trivial car autrement le sous-espace des invariants sous I^{s} serait de dimension 1 et comme il est stable sous G_p (I^{s} est un sous-groupe distingué), la représentation ρ serait décomposable ! La représentation ρ se factorise donc à travers le quotient par I^{s}, i.e., le produit semi-direct de I^{m} et $\widehat{\mathbb{Z}}$. On doit avoir $\alpha(\sigma) = 1$ sinon $\rho(\sigma)$ serait diagonalisable et admettrait deux sous-espaces propres distincts, qui seraient G_p stables, et la représentation ρ serait décomposable ! De plus $\rho(\sigma) \neq \mathrm{Id}$ sinon par la condition FS la représentation ρ serait décomposable ! On peut donc supposer $\rho(\sigma) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Posons $\rho(F) = \left(\begin{smallmatrix}a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, la condition $F\sigma F^{-1} = \sigma^p$ impose $a = p$. Par suite le caractère α est équivalent au caractère cyclotomique l-adique χ_l. Reste le cas où la représentation ρ est irréductible. Supposons $\rho_{|I^{\mathrm{s}}}$ irréductible, la théorie des représentation nous impose alors $p = 2$ ([Se3, Chap.II.4]). Supposons $p \neq 2$. Aussi la restriction de $\rho_{|I^{\mathrm{s}}}$ est réductible. Supposons-la non isotypique, i.e., $\rho_{|I^{\mathrm{s}}} = \alpha \oplus \beta$ avec $\alpha \neq \beta$. Notons $H \subset \mathrm{G}_p$ le stabilisateur de α, on a H sous-groupe ouvert normal d'indice 2 dans G_p. Appelons K l'extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$ donnée par H. On peut écrire $\rho_{|H} = \alpha \oplus \beta$, et on a ρ équivalente à l'induite sur G_p du caractère α sur G_K. Dans le cas où la représentation $\rho_{|I^{\mathrm{s}}}$ est isotypique, i.e., $\rho_{|I^{\mathrm{s}}} = \alpha \oplus \alpha$, on considère alors l'action de $\mathrm{G}_p/I^{\mathrm{s}}$ sur $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ qui doit être sans point fixe. En étudiant les diverses possibilités de points fixes pour $\rho(\sigma)$ et $\rho(F)$, on obtient que $\rho(\sigma)$ doit avoir deux points fixes qui sont permutés par $\rho(F)$, ce qui nous ramène au cas précédent. Dans le cas $p = 2$, pour l'existence de représentations non du type précédent, on peut voir les exercices dyadiques de Weil [We]. □

2.11 Classification des représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Une représentation π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur V un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel est dite admissible si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) le stabilisateur de tout v dans V est ouvert dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$;

ii) la dimension des invariants V^U de V sous l'action de tout sous groupe ouvert U de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est fini.

Remarque 2.12. *Si la dimension de V est finie alors π est une représentation admissible si et seulement si π est continue pour la topologie discrète sur V et p-adique sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On montre aussi que dans ce cas la représentation π se factorise par l'application déterminant, et en particulier si on suppose π irréductible π est alors de la forme $\chi \circ \det$ où χ est un caractère de $\mathbb{Q}_p^*$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l^*$ continue pour la topologie p-adique sur $\mathbb{Q}_p^*$ et discrète sur $\overline{\mathbb{Q}}_l^*$.*

Remarque 2.13. *Si la représentation π est une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, l'action du centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par la représentation π donne un caractère de $\mathbb{Q}_p^*$ appelé caractère central de la représentation π.*

On suppose désormais V de dimension infinie. Il existe alors deux types de représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$: les sous-quotients d'induites de caractères du sous-groupe de Borel, dites spéciales et de la série principale, et les autres représentations, les supercuspidales.

Commençons par les représentations induites. On note B le sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures. Soient μ_1 et μ_2 deux caractères de $\mathbb{Q}_p^*$. On considère le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $V(\mu_1, \mu_2)$ des fonctions ϕ localement constantes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ vérifiant :

$$\phi(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}.g) = \mu_1(x)\mu_2(z)\phi(g).$$

L'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $V(\mu_1, \mu_2)$ (par translation à droite) réalise une représentation admissible de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ notée $\rho(\mu_1, \mu_2)$ qui est en fait la représentation $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\mu_1, \mu_2)$ induite sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ du caractère (μ_1, μ_2) sur B associant à l'élément $b = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$ l'élément $\mu_1(x)\mu_2(z)$.

Théorème 2.14. *Soient* μ_1 *et* μ_2 *deux caractères de* $\mathbb{Q}_p^*$.

Supposons le caractère $\mu_1\mu_2^{-1}$ *différent de* χ_{triv} *et de* $|\ |_p^2$. *Alors la représentation admissible* $\rho(\mu_1,\mu_2)$ *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*est irréductible , elle est notée* $\pi(\mu_1,\mu_2)$ *et est dite de la série principale. De plus, la représentation* $\pi(\mu_1,\mu_2)$ *est équivalente à la représentation* $\pi(\mu_1',\mu_2')$ *si et seulement si* $\mu_1'=\mu_1$ *et* $\mu_2'=\mu_2$ *ou* $\mu_1'=\mu_2|\ |_p$ *et* $\mu_2'=\mu_1|\ |_p^{-1}$.

Si $\mu_1=\mu_2$ *alors la représentation admissible* $\rho(\mu_1,\mu_2)$ *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *admet un unique sous-espace stable de dimension 1 (engendré par la fonction* $\mu_1\circ\det$*) et le quotient de* $\rho(\mu_1,\mu_2)$ *par ce sous espace est une représentation admissible irréductible de dimension infinie de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *notée* $\mathrm{Sp}(\mu_1,\mu_2)$ *dite de la série spéciale. On note* Sp *la représentation* $\mathrm{Sp}(\chi_{\mathrm{triv}},\chi_{\mathrm{triv}})$ *et on a alors* $\mathrm{Sp}(\mu_1,\mu_2)=\mu_1\otimes\mathrm{Sp}$.

Si $\mu_1\mu_2^{-1}=|\ |_p^2$, *on note* $\mu=\mu_1|\ |_p^{-1}=\mu_2|\ |_p$. *Alors la représentation admissible de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ $\rho(\mu_1,\mu_2)$ *admet un unique sous espace stable de codimension 1 qui est une représentation admissible irréductible de dimension infinie de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *équivalente à la série spéciale* $\mu\otimes\mathrm{Sp}$.

Preuve. voir [JaLa, Part.I.3] ou [Ge, Chap.3] où les inductions sont considérées à coefficients complexes.

Remarque 2.15. *Le caractère central des représentations admissibles irréductibles notées* $\pi(\mu_1,\mu_2)$ *et* $\mathrm{Sp}(\mu_1,\mu_2)$ *est le caractère* $\mu_1\mu_2$.

Passons aux autres représentations irréductibles à savoir les représentations supercuspidales. Soit π une représentation admissible de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans V. On note V' l'ensemble des éléments v de V pour lesquels il existe U un sous groupe ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$ tel que $\int_U \pi(\left(\begin{smallmatrix}1&u\\0&1\end{smallmatrix}\right)).vdu=0$. La représentation π est alors dite supercuspidale si $V'=V$. On construit de telles représentations par un procédé dû à Weil voir par exemple dans [Ge, Chap.7.A] pour plus de précision. Ce procédé donne toutes les représentations supercuspidales dans le cas où $p\neq 2$. Plus précisément on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 2.16. *Soient* K *une extension quadratique de* $\mathbb{Q}_p$ *et* α *un caractère de* K^* *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{Q}}_l^*$ *ne se factorisant par la norme* $N_{K/\mathbb{Q}_p}$. *On peut associer à* α *une représentation* r_α *(représentation de Weil associée à* α*) de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *admissible irréductible et supercuspidale. De plus, en faisant varier* α *parmi les caractères de* K^* *et* K *parmi les extensions quadratiques de* $\mathbb{Q}_p$, *on obtient quand* p *est différent de* 2 *toutes les représentations admissibles irréductibles supercuspidales de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Dans le cas* $p=2$, *il existe des représentations supercuspidales que l'on atteint pas par le procédé de construction de Weil, elles sont dites extraordinaires (cf. [Ku] par exemple).*

On peut maintenant énoncer le théorème classifiant les représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour p premier.

Théorème 2.17. *Soient p un nombre premier et π une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel V. Alors :*

- *si V est de dimension finie, la représentation π est de la forme $\chi \circ \det$ où χ est un caractère de $\mathbb{Q}_p^*$;*
- *si V est de dimension infinie alors la représentation π est soit supercuspidale soit de la série principale ou spéciale.*

Le lemme suivant, que l'on trouve dans [De4] et qui nous sera utile dans la section suivante, est la variante en théorie des représentations de la théorie d'Atkin-Lehner des nouvelles formes. En même temps, le lemme montre que du coté des représentations de GL_2, le conducteur a une interprétation simple.

Lemme 2.18 (Deligne). *Soit p un nombre premier, et soit V une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un corps de caractéristique zéro. Pour n dans $\mathbb{N}$, notons K_n^1 le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $c \equiv 0\ [p^n]$ et $a-1 \equiv 0\ [p^n]$. Alors il existe un entier $c \geq 0$, appelé le conducteur de V, tel que pour tout $m \geq 0$ on a $\dim(V^{K_m^1}) = m-c+1$. La multiplicité de la valeur propre 0 de T_p sur $V^{K_m^1}$ est au moins $m-c-1$.*

2.19 Représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à une forme modulaire

Soient p, N et m trois entiers non nuls, p premier ne divisant pas N. On note C_m le schéma de modules compactifié $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^m), \Gamma_1(N))_{\overline{\mathbb{Q}}_l}$. En prenant pour morphismes de transition si $m_1 \geq m_2$ les morphismes naturels de C_{m_1} dans C_{m_2}, on considère $\widehat{C}$ la limite projective sur m des schémas C_m ; $\widehat{C}$ est un schéma car les morphismes de transitions sont finis donc affines. L'action à droite du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ sur chaque schéma C_m induit une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $\widehat{C}$. En fait, on a mieux car on dispose sur le schéma $\widehat{C}$ d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Intuitivement, ceci s'explique en disant que les correspondances de Hecke induites par des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ donnent des isomorphismes après passage à la limite. Une construction conceptuelle de cette action, en termes de catégories de courbes elliptiques à isogénie près, est donnée dans [DeRa, 3.14].

L'idée de cette construction est qu'il est équivalent de se donner soit une courbe elliptique E (sur un corps algébriquement clos k de caractéristique différente de p, disons), soit une courbe elliptique E “à isogénie près” muni d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau L dans $V_p(E) = \mathbb{Q} \otimes T_p(E)$ (avec $T_p(E)$ la limite projective des $E[p^n](k)$). La catégorie des courbes elliptiques à isogénie près sur k est obtenue en prenant comme objets les courbes elliptiques sur k, et en remplaçant les $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ par $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$. On montre alors que le foncteur $E \mapsto (E, T_p(E))$ est une équivalence. Se donner une courbe elliptique avec une trivialisation de toute la p-puissance torsion équivaut alors à se donner une courbe elliptique à isogénie près E, muni d'un réseau L et d'un isomorphisme $\phi\colon \mathbb{Q}_p^2 \to V_p(E)$. De ce point de vue, l'action (à droite) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est évidente :

$$(E, L, \phi) \cdot g = (E, L, \phi \circ g).$$

Retraduisons cette action en termes de courbes elliptiques, pour g dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ tel que $g^{-1}\mathbb{Z}_p^2 \subset \mathbb{Z}_p^2$. Soit E une courbe elliptique (sur k, toujours) et soit $\phi\colon \mathbb{Z}_p^2 \to T_p(E)$ un isomorphisme. Nous avons alors un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des isomorphismes induits par g et ϕ :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & g^{-1}\mathbb{Z}_p^2 & \to & \mathbb{Q}_p^2 & \to & \mathbb{Q}_p^2/g^{-1}\mathbb{Z}_p^2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}_p^2 & \to & \mathbb{Q}_p^2 & \to & \mathbb{Q}_p^2/\mathbb{Z}_p^2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & T_p(E) & \to & V_p(E) & \to & E[p^\infty] & \to & 0
\end{array}$$

Soit alors G l'image de $\mathbb{Z}_p^2/g^{-1}\mathbb{Z}_p^2$ dans $E[p^\infty]$, via g et ϕ, et soit $f\colon E \to E'$ le quotient par G. Alors f induit une injection $T_p(E) \to T_p(E')$ qui, via $\phi \circ g$, correspond à l'injection $g^{-1}\mathbb{Z}_p^2 \subset \mathbb{Z}_p^2$. On conclut que g envoie la classe d'isomorphisme de (E, ϕ) à celle de $(E', \phi \circ g)$.

Pour nos calculs, nous en donnons la description suivante. Le schéma $\widehat{C}$ classifie les classes de courbes elliptiques E munies d'une trivialisation de toute la p-puissance torsion et d'un point d'ordre N, ou plus précisément d'un système compatible ϕ_i de p^i-bases (P_i, Q_i) de $E[p^i]$ pour i parcourant $\mathbb{N}^*$ et d'un point d'ordre N. Soit g dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant $g.\mathbb{Z}_p^2 \supset \mathbb{Z}_p^2$, autrement dit $g^{-1} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On fait agir g sur $\widehat{C}$ de la façon suivante. On note v_p la valuation p-adique sur le corps $\mathbb{Q}_p$, et on pose $m = v_p(\det(g^{-1}))$. Soit n un entier, $n > m$. Donnons-nous maintenant un élément de $C_n(T)$: une classe E/T de courbe elliptique sur un schéma T sur $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, munie d'une $\Gamma(p^n)$-structure ϕ et d'une $\Gamma_1(N)$-structure P. Considérons le sous-groupe G de $E[p^n]$ engendré par $\phi(p^m g((p^{n-m}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2))$. On se donne alors une isogénie π_g de noyau G de E dans E'. Le triplet $(E', \phi', \pi_g(P))$ nous donne un élément de $C_{n-m}(T)$

où ϕ' est donnée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 & \xrightarrow{\phi.p^m g} & E[p^n] \\ \downarrow^{\mathrm{pr}} & & \downarrow^{\pi_g} \\ (\mathbb{Z}/p^{n-m}\mathbb{Z})^2 & \xrightarrow{\phi'} & E'[p^{n-m}] \end{array}$$

Ceci nous permet de définir une action à droite π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur le schéma $\widehat{C}$. Explicitons quelques actions : l'élément $g = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ donne $m = 2$, $p^2 g = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ d'où $G = E[p]$, aussi $E' = E$ et π_g est la multiplication par p. Autre exemple, en termes de base $(P_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la p-puissance torsion , l'élément $g = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ donne $m = 1$, $pg = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$, d'où $E' = E/\langle P_1\rangle$, $P'_i = \pi_g(P_{i+1})$, $Q'_i = \pi_g(Q_i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Considérons maintenant un objet universel $(\mathbf{E}, \phi, P)$ sur $\widehat{C}$. On munit le couple $(\widehat{C}, \mathbf{E})$ d'une "action par isogénies" du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, g agissant par $(\pi(g), \pi_g^*)$. Notons pour k entier, $k \geq 2$, $\widehat{\mathrm{H}}_k$ le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel limite inductive sur m des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels $\mathrm{H}^0(C_m, \omega^{\otimes k}(-\mathrm{cusps}))$. On a en fait $\widehat{\mathrm{H}}_k = \mathrm{H}^0(\widehat{C}, \omega_{\mathbf{E}/\widehat{X}}^{\otimes k}(-\mathrm{cusps}))$. Le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\widehat{\mathrm{H}}_k$ est alors muni d'une action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$: si $f \in \widehat{\mathrm{H}}_k$, on a $g.f = \pi_g^*(\pi(g)^*(f))$. L'action de $g = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ sur $\widehat{\mathrm{H}}_k$ se fait alors d'après les calculs précédents par $p^k\langle p\rangle^*$. Les actions des opérateurs de Hecke T_n avec n premier à p sur les $\mathrm{H}^0(C_m, \omega^{\otimes k}(-\mathrm{cusps}))$ sont compatibles pour m variable, et définissent donc des opérateurs T_n sur $\widehat{\mathrm{H}}_k$. Ces opérateurs commutent à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Proposition 2.20. *La représentation $\widehat{\mathrm{H}}_k$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est semi-simple. Les sous-espaces propres communs non nuls de $\widehat{\mathrm{H}}_k$ pour les T_n avec n premier à p sont irréductibles en tant que représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.*

Preuve. Le premier énoncé est une conséquence directe du fait que sur $\mathbb{C}$ le produit scalaire de Petersson (voir [DiIm]) est invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Montrons le deuxième énoncé. Soit V un sous-espace propre commun non nul des T_n avec n premier à p. Alors V est somme directe de sous-espaces V_i, irréductibles pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il nous faut montrer qu'il y a exactement un V_i. Comme V est non nul, il y en a au moins un. Montrons qu'il y en a au plus un. Pour tout V_i, et pour tout m assez grand (plus grand que le conducteur de V_i plus un), il y a d'après le Lemme 2.18 un f_i non nul dans V_i qui est invariant pour le sous-groupe K_m^1 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et tel que $T_p f_i = 0$. Mais dans tout $\mathrm{H}^0(C_m, \omega^{\otimes k}(-\mathrm{cusps}))$ les espaces propres communs pour tous les opérateurs de Hecke sont de dimension au plus un. $\square$

Soit maintenant f une forme modulaire parabolique de type $(p^n N, k, \varepsilon)$, propre pour tous les opérateurs de Hecke, et avec $p^n N > 4$. On considère alors le sous-$\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel W_f de $\widehat{\mathrm{H}}_k$ engendré par les $g.\mathrm{pr}^* f$ quand g parcourt $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On obtient ainsi une représentation $\pi_{f,p}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Proposition 2.21. *La représentation $\pi_{f,p}$ construite ci-dessus est une représentation irréductible admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Son caractère central est le caractère $\varepsilon| |_p^k$.*

Preuve. L'admissibilité de π_f vient de la construction. L'irréductibilité résulte de la Proposition précédente. Les calculs précédents donnant l'action du centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\widehat{\mathrm{H}}_k$ nous donne pour centre de la représentation π_f le caractère $\varepsilon| |_p^k$. $\square$

Remarque 2.22. *La construction précédente peut se faire en tout q premier, en considérant si q ne divise pas le niveau $p^n N$ de la forme considérée, le système de courbes modulaires $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(q^n), \Gamma_1(p^n N))$. On associe ainsi à la forme modulaire f une représentation $\pi_{f,q}$ admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_q)$. Remarquons que pour q ne divisant pas le niveau de f cette représentation $\pi_{f,q}$ est non ramifiée, au sens où elle admet un invariant non nul sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q)$. En conséquence elle est équivalente à une représentation de la forme $\mathrm{ind}(\alpha, \beta)$ avec α et β deux caractères non ramifiés dont les valeurs en q sont déterminées par la valeur propre a_q de la forme f, la valeur $\varepsilon(q)$ et par le poids k de f ([DiIm, §11.2]). Si $\mathbf{A}^{\mathrm{f}}$ est l'anneau des adèles finies sur $\mathbb{Q}$, on obtient ainsi une représentation admissible irréductible π_f de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})$.*

3 Suites exactes des cycles évanescents

On donne dans ce chapitre la description d'un modèle régulier sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N, \zeta_{p^n}])$ de la courbe modulaire $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}}$, et de diverses actions de groupes sur ce modèle (3.1). Ensuite, on rappelle le formalisme des cycles évanescents, et la construction de la suite exacte des cycles évanescents (3.5). Puis, on applique ces résultats au modèle construit précédemment (3.5). On explique en quoi l'utilisation de ces suites exactes et leur étude permettra d'avancer dans la démonstration du théorème principal (3.10). Enfin, on montre que les invariants sous les groupes d'inertie se trouvent dans la cohomologie de la fibre spéciale (3.4).

3.1 La courbe modulaire $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N))$

Soient p un nombre premier, N et n deux entiers. On suppose que $N > 4$ et p ne divise pas N. On considère sur le schéma $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N])$, la courbe modulaire $C^{\mathrm{o}} = \mathcal{M}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N))$ et sa compactification C égale à $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N))$, i.e., le schéma de modules compactifié sur S associé au problème de modules qui à $E/T/S$ une courbe elliptique associe l'ensemble des couples (ϕ, α) où ϕ est une $\Gamma(p^n)$-structure et α une $\Gamma_1(N)$-structure sur E/T. Si on note ζ_{p^n} une racine primitive p^n-ème de l'unité, le morphisme structural $C \to S$ se factorise par $S[\zeta_{p^n}] = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N][\zeta_{p^n}])$. En effet, pour toute courbe elliptique $E/T/S$ on dispose de l'accouplement de Weil $e_{p^n} : E[p^n] \times_T E[p^n] \to \mu_{p^n,T}$ ([KaMa, Ch.2]). On obtient la factorisation en associant à $(E/T, \phi, \alpha)$ dans $C^{\mathrm{o}}(T)$ l'élément $e_p(\phi(1,0), \phi(0,1))$ de $S[\zeta_{p^n}](T)$, que l'on étend par normalisation à la compactification C de C^{o}. Cela permet de définir de nouveaux problèmes et schémas de modules : ce sont pour $a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, les problèmes de modules sur $S[\zeta_{p^n}]$ notés $[\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}]$. Une structure de niveau $[\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}]$ sur $E/T/S[\zeta_{p^n}]$ est la donnée d'une $\Gamma(p^n)$-structure ϕ sur E/T vérifiant $e_{p^n}(\phi(1,0), \phi(0,1))$ égal $\zeta_{p^n}^a$ ([KaMa, Ch.9]). Pour $a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, on note Y_n^a le schéma de modules $\mathcal{M}(\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}, \Gamma_1(N))$ et X_n^a sa compactification. Ces schémas sont réguliers ([KaMa, Ch.9]). On pose $Y_n = \coprod_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} Y_n^a$ et $X_n = \coprod_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} X_n^a$. Ces schémas sont réguliers et on définit un morphisme du schéma X_n dans le schéma $C \times_S S[\zeta_{p^n}]$ en associant à l'élément $(E/T/S[\zeta_{p^n}], \phi, \alpha)$ l'élément $((E/T, \phi, \alpha), e_{p^n}(\phi(1,0), \phi(0,1)))$. Cela donne une identification de X_n à la normalisation $C_n \widetilde{\times}_S S[\zeta_{p^n}]$ de $C \times_S S[\zeta_{p^n}]$.

Remarque 3.2. *Le schéma construit ci-dessus $X_n = \coprod_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} X_n^a$ est tout simplement un modèle régulier de $C_{\mathbb{Q}}$ sur $S[\zeta_{p^n}]$. C'est le modèle obtenu en normalisant la droite j, c'est à dire $\mathbb{P}^1_S$, dans le corps de fonctions de $C \times_S S[\zeta_{p^n}]$.*

On dispose sur X_n d'une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ induite par l'action suivante : $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ agit sur Y_n par : $(E, \phi, \alpha).g = (E, \phi \circ g, \alpha)$. L'accouplement de Weil étant bilinéaire alterné, on a :

$$e_{p^n}(\phi \circ g(1,0), \phi \circ g(0,1)) = e_{p^n}(\phi(1,0), \phi(0,1))^{\det g}.$$

Aussi si ϕ est une $[\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}]$-structure sur E, $\phi \circ g$ est alors une $[\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a \times \det(g)-\mathrm{can}}]$-structure sur E.

On dispose aussi sur X_n de correspondances de Hecke. Soit q entier premier distinct de p. Si q ne divise pas N, on appelle $Y(N,q)$ le schéma $\coprod_a \mathcal{M}(\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}, \Gamma_1(N), \Gamma_0(q))$, et si q divise N, $Y(N,q)$ est le sous-problème de modules de $\coprod_a \mathcal{M}(\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}, \Gamma_1(N), \Gamma_0(q))$ classifiant les structures de niveau (ϕ, α, f) vérifiant $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}\alpha = 0$. On considère les morphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} s : Y(N,q) & \longrightarrow & Y \\ (E, \phi, \alpha, f : E \to E') & \to & (E, \phi, \alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} t : Y(N,q) & \longrightarrow & Y \\ (E, \phi, \alpha, f : E \to E') & \to & (E', f \circ \phi, f \circ \alpha) \end{array}$$

On peut noter que $f \circ \phi$ est une $[\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^{a \times q}-\mathrm{can}}]$-structure sur E'. Cela provient de :

$$\begin{aligned} e_{p^n}(f \circ \phi(1,0), f \circ \phi(0,1)) &= e_{p^n}(f^t \circ f\phi(1,0), \phi(0,1)) \\ &= e_{p^n}(\deg(f)\phi(1,0), \phi(0,1)) \\ &= e_{p^n}(\phi(1,0), \phi(0,1))^{(\deg f)} \end{aligned}$$

Puis on prolonge ces flèches sans problème aux compactifications qui sont construite par normalisation. Maintenant, on considère pour $a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, pour k entier, $k \geq 2$, et pour l premier différent de p, sur chaque $Y^a_{n,\mathrm{et}}$ le faisceau $\mathcal{F}^a_{k,l} = \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{R}^1\pi^a_*\overline{\mathbb{Q}}_l)$ où π^a est le morphisme structural de la courbe elliptique universelle $\mathbf{E}^a$ sur Y^a_n. On obtient alors sur Y_n le faisceau $\mathcal{F}_{k,l}$ somme des faisceaux $\mathcal{F}^a_{k,l}$. Notons j le morphisme de compactification de Y_n dans X_n. De façon analogue à 2.3 via $s_* \circ t^*$ on obtient un endomorphisme noté T^*_q sur les groupes de cohomologie l-adique $\mathrm{H}^i(X_{n,\overline{\mathbb{Q}}}, j_*\mathcal{F}_{k,l})$ pour $i \geq 0$. On remarque que l'action des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ respectent la structure de $\mathbf{T}$-module (voir 2.2).

Le groupe de Galois de $S[\zeta_{p^n}]$ sur S agit naturellement sur X_n par construction. Un élément de $\mathrm{Gal}(S[\zeta_{p^n}]/S) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ permute les composantes X^a_n de X_n : $b \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ envoit la composante X^a_n sur la composante $X^{ab^{-1}}_n$. Notons aussi que les groupes de cohomologie l-adique de $X_{n,\overline{\mathbb{Q}}}$ à valeurs dans les faisceaux $j_*\mathcal{F}_{k,l}$ sont naturellement munis d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et que cette action commute à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et respecte la structure de $\mathbf{T}$-module.

Remarque 3.3. *En pratique, on travaillera plutôt sur* $T_n = \mathrm{Spec}(W[\zeta_{p^n}])$ *et non sur* $S = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[1/N, \zeta_{p^n}]$ *où* $W = \mathbb{Z}_p^{\mathrm{nr}}$ *est l'extension maximal non ramifié de* $\mathbb{Z}_p$. *Tous les résultats et les descriptions de ce paragraphe restent justes en remplaçant* S *par* W. *La formation du morphisme trace d'un morphisme fini et plat est compatible au changement de base ([Gr, SGA 4]) ; les schémas* Y_n^a,Y_n *et* X_n *restent réguliers sur* W *([KaMa, Ch.8, Ch.9]).*

Remarque 3.4. *Le schéma* X_{n,T_n} *est régulier sur* T_n. *Son lieu de non lissité est l'ensemble des points supersinguliers en caractéristique* p. *Le faisceau* $j_*\mathcal{F}_{k,l}$ *est lisse de rang* $l+1$ *sur* $X_n - \mathrm{Cusps}$, *et sa restriction aux cusps est lisse de rang 1. Enfin* $j_*\mathcal{F}_{k,l}$ *est modérément ramifié le long du diviseur* Cusps *([KaMa, Ch.5, Ch.9, Ch.14.4]).*

3.5 La suite exacte des cycles évanescents

Soit S un anneau strictement local, i.e., un anneau local hensélien à corps résiduel séparablement clos, de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle p premier. On appelle η le point générique de $\mathrm{Spec}(S)$, $\bar{\eta}$ un point géométrique générique et s son point fermé. On se donne X un S-schéma de type fini, on note f le morphisme structural de X dans S. On considère sur X_{et}, $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}_l$ (ou un $\mathbb{Q}_l$) faisceau avec l différent de p. L'objet des cycles évanescents est la comparaison des cohomologies de $\mathcal{F}$ sur la fibre spéciale X_s et la fibre générique géométrique $X_{\bar{\eta}}$. Un résultat classique est par exemple que si f est propre, lisse et $\mathcal{F}$ est lisse alors ces cohomologies sont canoniquement isomorphes ([Gr, SGA 4, Exp. XVI]). La situation est la suivante :

$$\begin{array}{ccccc} X_s & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{\bar{j}} & X_{\bar{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & \longrightarrow & S & \longleftarrow & \bar{\eta} \end{array}$$

Les cycles évanescents sur X_s sont les faisceaux $\psi^q = i^*\mathrm{R}^q\bar{j}_*\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ pour $q \geq 0$. On sait que si f est propre alors $\mathrm{H}^i(X, \mathrm{R}^q\bar{j}_*\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) \overset{i^*}{\simeq} \mathrm{H}^i(X_s, i^*\mathrm{R}^q\bar{j}_*\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$ ([Gr, SGA 4, Exp. XII]) et la suite spectrale de Leray pour $\bar{j}$:

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(X, \mathrm{R}^q\bar{j}_*\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{\bar{\eta}})$$

devient alors :

$$\mathrm{H}^p(X_s, \psi^q) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{\bar{\eta}}) \tag{1}$$

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ agit sur les ψ^q et la suite spectrale 1 est équivariante pour cette action.

On interprète les faisceaux ψ^q comme suit ([Gr, SGA $4\frac{1}{2}$]) : soit $\bar{x}$ un point géométrique de X_s, on note $\tilde{X}^{\bar{x}}$ le schéma $\mathrm{Spec}(O^{h.s.}_{X,\bar{x}})$ (h.s. pour hensélisé strict). Sa fibre générique géométrique $\tilde{X}^{\bar{x}}_{\bar{\eta}}$ est appelée variété des cycles évanescents. On a $\psi^q_{\bar{x}} = \mathrm{H}^q(\tilde{X}^{\bar{x}}_{\bar{\eta}}, \mathcal{F})$ avec un léger abus de notation : ce n'est pas $\mathcal{F}$ mais $((\pi^{\bar{x}})^*\mathcal{F})_{\bar{\eta}} = (\pi^{\bar{x}}_{\bar{\eta}})^*(\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$ où $\pi^{\bar{x}}$ est le morphisme canonique de $\mathrm{Spec}(O^{h.s.}_{X,\bar{x}})$ dans X, et $\pi^{\bar{x}}_{\bar{\eta}}$ sa fibre sur $\bar{\eta}$. Maintenant, si $\bar{x}$ est sur le lieu lisse de $(f, \mathcal{F})$, i.e., les points au voisinages desquels f et $\mathcal{F}$ sont lisses alors, par acyclicité locale des morphismes lisses, on a $\psi^q_{\bar{x}} = 0$ pour $i > 0$ et $\psi^0_{\bar{x}} \simeq \mathcal{F}_{\bar{x}}$ par le morphisme canonique $i^*\mathcal{F} \to \psi^0 = i^*\bar{j}_*\bar{j}^*\mathcal{F}$ ([Gr, SGA 4, Exp. XV, 7.I]).

Théorème 3.6. *Soient $n \in \mathbb{N}$, k et N deux entiers $k \geq 2$ et $N > 4$, p et l deux nombres premiers distincts. On note $W = \mathbb{Z}_p^{\mathrm{nr}}$ et $T_n = \mathrm{Spec}(W[\zeta_{p^n}])$. On a $T_n = \{s, \eta\}$ où η est le point générique de T_n. Pour $a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, on considère le schéma de modules sur T_n, $Y_n^a = \mathcal{M}(\Gamma(p^n)^{\zeta^a_{p^n}-can}, \Gamma_1(N))$, et sa compactification X_n^a. Soient Y_n le schéma $\coprod_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} Y_n^a$, X_n le schéma $\coprod_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} X_n^a$, et j le morphisme de compactification de Y_n dans X_n. On considère sur $X_{n,\mathrm{et}}$ le $\mathbb{Q}_l$-faisceau $\mathcal{F}_k = j_*\mathcal{F}_{k,l}$ (cf 3.1). On note $X_n^{\mathrm{s.s.}}$ l'ensemble des points supersinguliers de $X_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ et pour $x \in X_n^{\mathrm{s.s.}}$, $\psi_{x,n} = \psi^1_x = \mathrm{H}^1(\tilde{X}^x_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_k)$.*

On dispose d'une suite exacte de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels équivariante pour l'action de $\mathrm{G}_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \times \mathbf{T}$ appelée suite exacte des cycles évanescents :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(X_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\bar{\eta}}) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X_n^{\mathrm{s.s.}}} \psi_{x,n} \\ & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(X_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\bar{\eta}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Preuve. Les notations sont celles du début du paragraphe. Par des arguments dimensionnels on a $\psi^i = 0$ pour $i > 1$. La suite spectrale (1) donne alors la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(X_{n,s}, \psi^0) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(X_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\bar{\eta}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(X_{n,s}, \psi^1) \\ & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(X_{n,s}, \psi^0) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(X_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\bar{\eta}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aux points fermés $\bar{x}$ de la fibre spéciale $X_{n,s}$ qui sont lisses pour $(f, \mathcal{F}_k)$, on a bien $\psi^0_{\bar{x}} \simeq \mathcal{F}_{k,\bar{x}}$ et $\psi^1_{\bar{x}} = 0$. Il reste donc à traiter les points non lisses de $(f, \mathcal{F}_k)$, i.e., les points supersinguliers de $X_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ et les pointes (3.4). Soit $\bar{x}$ un point supersingulier. Plaçons nous sur $\tilde{X}^{\bar{x}}_n$. Le faisceau $\mathcal{F}_k$ est alors constant. Pour avoir $\mathcal{F}_{k\bar{x}}$ et $\psi^0_{\bar{x}}$ égaux il suffit d'avoir $\tilde{X}^{\bar{x}}_{n,\bar{\eta}}$ connexe. Or X_n est normal, donc en particulier $\tilde{X}^{\bar{x}}_n$ est intègre, et normal (même régulier), de fibre spéciale réduite. Supposons que $\tilde{X}^{\bar{x}}_{n,\bar{\eta}}$ ne soit pas intègre. Le morphisme $\tilde{X}^{\bar{x}}_{n,\eta} \to \eta$ se factorise alors par une extension finie non triviale $\eta' \to \eta$, donc ramifiée. Comme $\tilde{X}^{\bar{x}}_n$ est normal, le morphisme se factorise par la normalisation $T'_n \to T_n$ de T_n dans η', ce qui contredit que la fibre spéciale de $\tilde{X}^{\bar{x}}_n$ soit réduite. Donc $\tilde{X}^{\bar{x}}_{n,\bar{\eta}}$ est bien intègre.

La restriction de $\mathcal{F}_k$ au schéma des pointes D, qui est fini et étale sur T_n, est lisse (de rang 1) et modérément ramifié (non ramifié si $k = 2$). En utilisant les résultats de [Gr, SGA 7, Exp. XIII, §2] on a l'isomorphisme $\psi^0_{\bar{x}} \simeq \mathcal{F}_{k,\bar{x}}$ et $\psi^1_{\bar{x}} = 0$. Finalement, on obtient $\psi^0 \simeq \mathcal{F}_{k,s}$ et ψ^1 à support dans $X_n^{\mathrm{s.s.}}$ ([KaMa, 14.2]). La suite exacte est naturellement $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-équivariante, et cette action s'étend naturellement en une action équivariante de G_p car la situation présente provient par changement de base et normalisation d'une situation sur $\mathbb{Q}_p$. La suite est aussi équivariante pour les actions de $\mathbf{T}$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. On sait que les actions de $\mathbf{T}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ commutent. L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ commute avec celles de $\mathbf{T}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ car ces deux dernières sont définies sur η et proviennent de correspondances définies sur $\mathbb{Q}$. Cela donne le résultat. □

Remarque 3.7. *L'action du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ *étant naturellement triviale sur les groupes de cohomologie du couple* $(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s})$ *, l'action de l'inertie en p,* I_p*, se fait sur ces groupes par l'action du quotient* $\mathrm{I}_p/\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ *i.e.,* $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ *; action décrite précédemment (cf. fin 3.1).*

Corollaire 3.8. *Les notations sont celles du théorème 3.6. Supposons* $k > 2$ *alors la suite des cycles évanescents devient :*

$$0 \to \mathrm{H}^1(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) \to \mathrm{H}^1(X_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\bar{\eta}}) \to \bigoplus_{x \in X_n^{\mathrm{s.s.}}} \psi_{x,n} \to 0$$

Supposons $k = 2$ *alors la suite exacte des cycles évanescents devient :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathrm{H}^1(X_{n,s}, \overline{\mathbb{Q}}_l) & \to & \mathrm{H}^1(X_{n,\bar{\eta}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) & \to & \bigoplus_{x \in X_n^{\mathrm{s.s.}}} \psi_{x,n} \quad \to \\ & & \bigoplus_{a,b} \overline{\mathbb{Q}}_l(-1) & \xrightarrow{\phi_n} & \bigoplus_a \overline{\mathbb{Q}}_l(-1) & \to & 0 \end{array}$$

où a parcourt $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ *et b parcourt* $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$*. On notera* $G'_n = \ker \phi_n$.

Preuve. Supposons $k > 2$. Les résultats de [KaMa, Ch.14.3.4] donnent immédiatement $\mathrm{H}^2(X^a_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\bar{\eta}}) = 0$ et par suite $\mathrm{H}^2(X_{n,\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\bar{\eta}}) = 0$. Sur la fibre spéciale, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{H}^2(X^a_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) \simeq \mathrm{H}^2(\widetilde{X^a_{n,s}}, \tilde{\mathcal{F}_{k,s}}) = 0$$

où $\tilde{X}_n$ est la normalisation de X_n. Par suite $\mathrm{H}^2(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) = 0$.

Supposons $k = 2$; on a $\mathrm{H}^2(X^a_{n,\bar\eta}, \mathcal{F}_{k,\bar\eta}) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_l(-1)$ et par suite on aura un isomorphisme entre $\mathrm{H}^2(X_{n,\bar\eta}, \mathcal{F}_{k,\bar\eta})$ et $\bigoplus_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} \overline{\mathbb{Q}}_l(-1)$. Sur la fibre spéciale, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{H}^2(X^a_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) \simeq \mathrm{H}^2(\widetilde{X^a_{n,s}}, \tilde{\mathcal{F}_{k,s}})$$

et $\mathrm{H}^2(\widetilde{X^a_{n,s}}, \tilde{\mathcal{F}_{k,s}}) = \bigoplus_{\text{comp.irred.}} \overline{\mathbb{Q}}_l(-1)$. Les composantes irréductibles de X^a_n sont indexées par $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ comme on le verra plus loin (cf 4.1). Aussi : $\mathrm{H}^2(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) = \bigoplus_{a,b} \overline{\mathbb{Q}}_l(-1)$ où a parcourt $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et b parcourt $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. □

Remarque 3.9. *Dans le cas $k = 2$; l'action de l'opérateur T^*_q pour q ne divisant pas pN sur $\mathrm{H}^0(Y_n, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est simplement la multiplication par $q + 1$ fois la matrice de permutation donnant l'action sur les racines de l'unité d'ordre p^n. Par suite T^*_q agit de la même façon sur les $\mathrm{H}^i(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s})$ et sur les $\mathrm{H}^i(X_{n,\bar\eta}, \mathcal{F}_{n,\bar\eta})$ pour $i = 0, 2$.*

3.10 Le problème

Soient n et m deux entiers, $n \geq m$. On dispose d'un morphisme fini canonique de X_n dans X_m pour $n \geq m$. On appelle $\widehat{X}$ le schéma sur $W[\mu_{p^\infty}]$ limite projective sur n des schémas X_n. On pose : $\mathrm{H}^1_n = \mathrm{H}^1(X_{n,\bar\eta}, \mathcal{F}_{k,\bar\eta})$, $\mathrm{H}^1_{n,s} = \mathrm{H}^1(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s})$. On dispose de l'injection canonique de $\mathrm{H}^1_{n,s}$ dans H^1_n, et on pose $\mathrm{H}^1_{n,\mathrm{e}} = \oplus_x \psi_{x,n}$. En poids deux, on pose $G'_n = \mathrm{Ker}\phi_n$ (cf 3.2.3). On considère les limites inductives sur n suivantes :

$$\begin{array}{rclcl}
\mathrm{H}^1 & = & \varinjlim_n \mathrm{H}^1(X_{n,\bar\eta}, \mathcal{F}_{k,\bar\eta}) & = & \varinjlim_n \mathrm{H}^1_n \\
\mathrm{H}^1_s & = & \varinjlim_n \mathrm{H}^1(X_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) & = & \varinjlim_n \mathrm{H}^1_{n,s} \\
\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}} & = & \varinjlim_n \oplus_{x\in X^{\mathrm{s.s.}}_n} \psi_{x,n} & = & \varinjlim_n \mathrm{H}^1_{n,\mathrm{e}} \\
G' & = & \varinjlim_n G'_n & &
\end{array}$$

Ces groupes sont munis d'une action admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il suffit de remarquer que l'on a $\widehat{X} = \lim X_K$ où K parcourt les sous groupes compacts ouverts K de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $X_K = \widehat{X}/K$. Notons π_K le morphisme de X_K sur $X_0 = X_1(N)$ et $\mathcal{F}_K = \pi_K^*\mathcal{F}$, puis $\widehat{\pi}$ le morphisme de $\widehat{X}$ vers $X_0 = X_1(N)$ et $\widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\pi}^*\mathcal{F}$. Le couple $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{F}})$ est muni de façon analogue à 2.19 d'une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On en déduit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur la limite inductive sur les sous groupes ouverts compacts K de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des $\mathrm{H}^1((X_K)_{\bar\eta}, (\mathcal{F}_K)_{\bar\eta})$. En remarquant alors que les sous groupes compacts ouverts de la forme $K_n = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ tels que $g \equiv \mathrm{Id} \bmod p^n\}$ forment un système cofinal pour cette limite et que $X_n = \widehat{X}/K_n$, on a bien une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur H^1. De même, on a une action admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{s}}$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$. Ces $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels sont aussi munis d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}$ (qui ici est définie comme l'algèbre de polynômes sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ en des variables T_q, $q \neq p$, et $\langle a \rangle$, a dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$) et du groupe de Galois G_p. Ces trois actions commutent entre elles. La section précédente nous donne :

Corollaire 3.11. *Avec les notations ci-dessus, on dispose de la suite exacte des cycles évanescents suivante en poids $k > 2$:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1_s \longrightarrow \mathrm{H}^1 \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{e}} \longrightarrow 0$$

En poids deux, on a la suite des cycles évanescents suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1_s \longrightarrow \mathrm{H}^1 \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{e}} \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

Cette suite est $\mathrm{G}_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathbf{T}$*-équivariante.*

Soient p un nombre premier, l un nombre premier distinct de p, N un entier non divisible par p. On se donne ε un caractère de $(\mathbb{Z}/p^nN\mathbb{Z})^*$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Soit f une nouvelle forme parabolique propre de type (p^nN, k, ε) à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. On a associé à la forme modulaire f une représentation galoisienne irréductible de dimension deux notée ρ_f (2.4), et une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ notée $\pi_{f,p}$ (2.19), toutes deux à valeurs dans des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels. On connaît, à semi-simplification près, la restriction de la représentation ρ_f aux sous groupes de décomposition $D_q = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_q}/\mathbb{Q}_q)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en q premier ne divisant pas pNl. On cherche ici à comprendre la restriction de la représentation ρ_f au groupe de décomposition en p que l'on notera $\rho_{f,p}$. Plus précisément, on veut montrer que la représentation $\pi_{f,p}$ détermine la représentation $\rho_{f,p}$ (supposée F-semi simple ou si on préfère F-semi simplifiée) ; détermination en termes des classifications de telles représentations données au premier chapitre pour le cas $p \neq 2$ (2.11, 2.8). La représentation $\rho_{f,p}^\vee \otimes \pi_{f,p}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ se retrouve naturellement dans le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel H^1. Explicitons ce fait. Considérons le sous-module de H^1 où l'action des opérateurs de Hecke se fait par les valeurs propres de f, i.e., le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\mathrm{H}^1[m_f]$ où m_f est le noyau du morphisme de $\mathbf{T}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ donné par les valeurs propres de la forme modulaire f. On a $\mathrm{H}^1[m_f] \simeq \pi_{f,p}.|\ |_p^{-1} \otimes \rho_{f,p}^\vee$. En effet, l'isomorphisme d'Eichler-Shimura, induit, en travaillant sur $\mathbb{C}$, un isomorphisme entre $\mathrm{H}^0(C_n, \omega^k(-\mathrm{cusps})) \oplus \overline{\mathrm{H}^0(C_n, \omega^k(-\mathrm{cusps}))}$ et $\mathrm{H}^1(C_n, \mathcal{F}_k)$. En passant à la limite inductive sur n, on obtient un isomorphisme entre $\widehat{\mathrm{H}}_k \oplus \overline{\widehat{\mathrm{H}}_k}$ et H^1. La construction de $\pi_{f,p}$ (Proposition 2.21) implique que

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ opère sur $\mathrm{H}^1[m_f]$ via $(\pi_{f,p}.|\ |_p^{-1} \oplus \pi_{f,p}.|\ |_p^{-1})$ (la torsion par $|\ |_p^{-1}$ provient du fait que l'isomorphisme d'Eichler-Shimura s'obtient via l'identification du faisceau $\omega^k(-\mathrm{cusps})$ au faisceau $\Omega^1 \otimes \omega^{k-2}$, et que l'on ait construit $\pi_{f,p}$ avec les sections globales de $\omega^k(-\mathrm{cusps})$.) On voit donc que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ opère sur $\mathrm{H}^1[m_f]$ via $\pi_{f,p}.|\ |_p^{-1} \otimes \rho$ avec ρ de dimension deux. En prenant les invariants sous le sous-groupe K_n^1 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et en regardant la construction de ρ_f dans la Section 2.4, on voit que $\rho = \rho_{f,p}^\vee$.

3.12 Les invariants sous l'action du groupe d'inertie

Remettons-nous dans la situation du Théorème 3.6. On a donc des entiers $n \geq 0$, $k \geq 2$, $N \geq 5$ et deux nombres premiers p et l distincts. On note $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p^{\mathrm{nr}}[\zeta_{p^n}])$, η le point générique de S et s le point fermé. On note Y la réunion disjointe des $\mathcal{M}(\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a - can}, \Gamma_1(N))$ (a parcourant $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$), $j\colon Y \to X$ la compactification, et $\mathcal{F}$ le faisceau sur X construit comme dans la section 3.1. On considère alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_s, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$$

Proposition 3.13. *L'injection canonique ci-dessus de* $\mathrm{H}^1(X_s, \mathcal{F})$ *dans* $\mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mathcal{F})$ *induit un isomorphisme entre* $\mathrm{H}^1(X_s, \mathcal{F})$ *et le sous-groupe des invariants sous l'inertie* $\mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mathcal{F})^G$*, où l'on note* $G = \mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)$*.*

Preuve. Supposons d'abord que $k = 2$. Alors $\mathcal{F}$ est un faisceau constant, et on est amené à démontrer que pour m premier à p, le conoyau de :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_s, \mu_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mu_m)^G$$

est d'ordre borné indépendamment de m. Soit J le modèle de Néron de la jacobienne $\mathrm{Pic}^0_{X_\eta/\eta}$ de X_η. Comme X est régulier, la composante connexe (fibre par fibre) J^0 de J est égale à $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ (voir par exemple [BLR, Ch. 9]). La suite exacte de Kummer donne alors :

$$\mathrm{H}^1(X_s, \mu_m) = \mathrm{Pic}(X_s)[m] = \mathrm{Pic}^0_{X_s/s}(s)[m] = J^0(s)[m] = J^0(S)[m],$$

et :

$$\mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mu_m)^G = \mathrm{Pic}(X_{\bar\eta})[m]^G = J(\bar\eta)[m]^G = J(\eta)[m] = J(S)[m].$$

Il en résulte que l'ordre de $\mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mu_m)/\mathrm{H}^1(X_s, \mu_m)$ est borné par l'ordre du groupe de composantes connexes J_s/J_s^0, donc indépendamment de m.

Supposons maintenant que k est au moins 3. Pour m premier à p, notons $\mathcal{F}_m$ la version de $\mathcal{F}$ avec des coefficients modulo m, c'est à dire,

$\mathcal{F}_m = j_*\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{R}^1\pi_*\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, où π est le morphisme structural de la courbe elliptique universelle sur Y. Nous allons montrer que les ordres des noyaux et conoyaux des morphismes :

$$\mathrm{H}^1(X_s, \mathcal{F}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mathcal{F}_m)^G$$

sont bornés indépendamment de m. Soit donc m premier à p. Comme $f\colon X \to S$ est propre, les morphismes $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}_m) \to \mathrm{H}^i(X_s, \mathcal{F}_m)$ sont tous des isomorphismes (voir [Gr, 4.5, p. 39]). Le morphisme ci-dessus est alors obtenu par composition :

$$\mathrm{H}^1(X_s, \mathcal{F}_m) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_\eta, \mathcal{F}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mathcal{F}_m)^G.$$

La suite spectrale de Leray pour $f\colon X_\eta \to \eta$, où l'on interprète les faisceaux de groupes abéliens sur η comme des G-modules discrets, donne la suite exacte :

$$\mathrm{H}^1(G, \mathcal{F}_m(X_{\bar\eta})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_\eta, \mathcal{F}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_{\bar\eta}, \mathcal{F}_n)^G \longrightarrow \mathrm{H}^2(G, \mathcal{F}_m(X_{\bar\eta})).$$

L'ordre de $\mathcal{F}_m(X_{\bar\eta})$ est borné indépendamment de m, car c'est le cas du sous-groupe des $\Gamma_1(N)$-invariants de $\mathrm{Sym}^{k-2}((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2)$ (par exemple, dans $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}^2)$ il n'y a pas d'élément non nul fixé par $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\N&1\end{smallmatrix}\right)$, ce qui montre qu'un certain déterminant fixe non nul annule tous les invariants dans les $\mathrm{Sym}^{k-2}((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2)$ avec m variable). Il nous suffit donc de montrer que les noyaux et conoyaux des :

$$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_\eta, \mathcal{F}_m)$$

sont bornés indépendamment de m.

Lemme 3.14. *Les morphismes canoniques $\mathcal{F}_m \to i_*i^{-1}\mathcal{F}_m$ sont des isomorphismes.*

Preuve. Il suffit de montrer que les morphismes induits sur les fibres sont des isomorphismes. Ceci est clair pour les points géométriques au-dessus de X_η, donc soit x dans $X(s)$. Alors $(i_*i^{-1}\mathcal{F}_m)_x = \mathcal{F}_m(X^x_\eta)$, avec $X^x = \mathrm{Spec}(O^{\mathrm{h.s.}}_{X,x})$ le hensélisé strict de X en x, et $X^x_\eta = \mathrm{Spec}(O^{\mathrm{h.s.}}_{X,x}[1/p])$ la fibre générique de X^x. Comme $O_{X,x}$ est régulier, il en est de même pour $O^{\mathrm{h.s.}}_{X,x}$, qui est donc intègre, ainsi que $O^{\mathrm{h.s.}}_{X,x}[1/p]$. Si x est dans $Y(s)$ (i.e., si x n'est pas une pointe), alors $\mathcal{F}_m$ est constant sur X^x, et on a donc $\mathcal{F}_m(X^x_\eta) = \mathcal{F}_{m,x}$. Ceci montre donc que $\mathcal{F}_m \to i_*i^{-1}\mathcal{F}_m$ est un isomorphisme sur Y. Cela suffit pour conclure qu'il en est de même sur X, car on a alors :

$$\mathcal{F}_m = j_*j^{-1}\mathcal{F}_m = j_*i'_*i'^{-1}j^{-1}\mathcal{F}_m = i_*j'_*j'^{-1}i^{-1}\mathcal{F}_m = i_*i^{-1}\mathcal{F}_m,$$

où nous avons écrit $i'\colon Y_\eta \to Y$ et $j'\colon Y_\eta \to X_\eta$ les inclusions. □

Les suites spectrales de Leray pour les inclusions $i\colon X_\eta \to X$ et $i\colon Y_\eta \to Y$ montrent que les morphismes canoniques $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}_m) \to \mathrm{H}^1(X_\eta, \mathcal{F}_m)$ et $\mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F}_m) \to \mathrm{H}^1(Y_\eta, \mathcal{F}_m)$ sont des injections. Considérons alors le diagramme commutatif suivant, où les colonnes sont exactes et données par les suites spectrales de Leray pour j_* et où la ligne au milieu est exacte et donnée par celle pour i_* :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}_m) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^1(X_\eta, \mathcal{F}_m) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F}_m) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^1(Y_\eta, \mathcal{F}_m) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(Y, \mathrm{R}^1 i_* \mathcal{F}_m) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(X_\eta, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m) & &
\end{array}$$

Ce diagramme montre que les deux lemmes suivants terminent la preuve de la Proposition.

Lemme 3.15. *Notons $r\colon \tilde{Y}_s \to Y_s$ la normalisation. Nous avons alors des isomorphismes $\mathrm{R}^1 i_* \mathcal{F}_m \to r_* r^{-1} \mathcal{F}_m(-1)$ sur Y_s. Les ordres des $\mathrm{H}^1(Y, \mathrm{R}^1 i_* \mathcal{F}_m)$ sont bornés indépendamment de m.*

Lemme 3.16. *Les morphismes $\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m) \to \mathrm{H}^0(X_\eta, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m)$ sont des isomorphismes.*

Preuve (du Lemme 3.15). Admettons d'abord l'existence des isomorphismes. Toute composante irréductible de $\tilde{Y}_s$ est un revêtement fini de $Y_1(N)_s$. L'argument donné ci-dessus pour $\mathcal{F}_m(X_{\bar\eta})$ montre alors que les ordres des $\mathrm{H}^0(\tilde{Y}_s, r^{-1}\mathcal{F}_m)$ sont bornés indépendamment de m (cette fois, on pourrait se baser sur le fait que les $\mathcal{M}(\Gamma(m)^{\zeta_m^a - can}, \Gamma_1(N))_s$ sont irréductibles). Donc les $\mathrm{H}^0(Y, \mathrm{R}^1 i_* \mathcal{F}_m)$ sont bornés indépendamment de m.

Il nous reste à démontrer l'existence des isomorphismes. Construisons des morphismes $\mathrm{R}^1 i_* \mathcal{F}_m(1) \to r_* r^{-1} \mathcal{F}_m$ de faisceaux sur Y. Le faisceau $\mathrm{R}^1 i_* \mathcal{F}_m(1)$ est le faisceautisé du préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^1(U_\eta, \mathcal{F}_m \otimes \mu_m)$, pour les $U \to Y$ étale. Pour définir un tel morphisme, il suffit donner des morphismes $\mathrm{H}^1(U_\eta, \mathcal{F}_m \otimes \mu_m) \to r_* r^{-1} \mathcal{F}_m(U)$, pour U assez petit et de façon compatible aux restrictions. Nous pouvons donc supposer que $\mathcal{F}_m$ est constant sur U, que $U = \mathrm{Spec}(A)$ avec A intègre (et régulier) et que $U_s = V(f_1 \cdots f_a)$ avec les f_i irréductibles et distincts. Les $V(f_i)$ sont donc les composantes connexes de $r^{-1}U_s$. On a donc :

$$r^{-1}\mathcal{F}_m(r^{-1}U) = \mathcal{F}_m(U)^a.$$

La suite exacte de Kummer donne des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_m(U) \otimes A[1/f_1 \cdots f_a]^* \longrightarrow \mathrm{H}^1(U_\eta, \mathcal{F}_m \otimes \mu_m) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_\eta).$$

Comme $\mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(U_\eta)$ est surjectif, et que tout élément de $\mathrm{Pic}(U)$ est trivial localement, il nous suffit de définir des morphismes :

$$\mathcal{F}_m(U) \otimes A[1/f_1 \cdots f_a]^* \longrightarrow \mathcal{F}_m(U)^a = r^{-1}\mathcal{F}_m(r^{-1}U).$$

Les morphismes recherchés sont donc obtenus en utilisant la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow A[1/f_1 \cdots f_a]^* \longrightarrow \mathbb{Z}^a \longrightarrow 0,$$

où l'on associe à un élément de $A[1/f_1 \cdots f_a]^*$ ses valuations le long des $V(f_i)$.

Montrons maintenant que les morphismes obtenus sont des isomorphismes. Il suffit de montrer que les morphismes induits sur les fibres sont des isomorphismes. Comme les deux faisceaux ont support dans Y_s, il suffit de considérer les fibres en des points de Y_s. Soit donc x dans $Y(s)$, et soit $A = O^{\text{h.s.}}_{X,x}$. Notons $f_1, \ldots, f_a$ des équations locales des branches de Y_s passant par x. Comme A est strictement hensélien, on a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes A^* = \{0\}$, d'où :

$$(\mathrm{R}^1 i_* \mathcal{F}_m(1))_x = \mathcal{F}_{m,x} \otimes A[1/f_1 \cdots f_a] = \mathcal{F}^a_{m,x} = (r_* r^{-1}\mathcal{F}_m)_x.$$

Ceci termine la preuve du Lemme 3.15. □

Preuve (du Lemme 3.16). Il nous faut montrer que les morphismes :

$$\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m) \to \mathrm{H}^0(X_\eta, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m)$$

sont des isomorphismes. Les faisceaux $\mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m$ ont support dans les pointes, et les modules (et morphismes) en question sont des sommes directes indexées par les pointes. Il suffit donc de regarder les contributions des pointes séparément. Soit donc x dans $X(s)$ une pointe. Notons $A = O^{\text{h.s.}}_{X,x}$. Alors A est régulier, avec paramètres π (qui est un paramètre de S) et t (une équation locale pour la pointe passant par x). De façon analogue, posons $B = O^{\text{h.s.}}_{X_\eta,y}$, où y dans $X(\bar{\eta})$ est le point géométrique générique de la pointe passant par x. Alors B est un anneau de valuation discrète, avec uniformisante t. Avec ces notations, on a :

$$\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m) = \mathrm{H}^1(U, \mathcal{F}_m), \quad \text{où} \quad U = \mathrm{Spec}(A[t^{-1}])$$

et :

$$\mathrm{H}^0(X_\eta, \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{F}_m) = \mathrm{H}^1(V, \mathcal{F}_m)^{\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}, \quad \text{où} \quad V = \mathrm{Spec}(B[t^{-1}]).$$

Notons $A' = A[t']/((t')^m - t)$ et $B' = B[t']/((t')^m - t)$. A l'aide de la courbe de Tate, on voit que $\mathcal{F}_m$ est constant sur $U' = \mathrm{Spec}(A'[t^{-1}])$ et sur $V' = \mathrm{Spec}(B'[t^{-1}])$. Les morphismes $U' \to U$ et $V' \to V$ sont finies étales galoisiennes de groupe μ_m. Ceci fournit deux suites spectrales,

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mu_m, \mathrm{H}^q(U', \mathcal{F}_m)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(U, \mathcal{F}_m)$$

et

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mu_m, \mathrm{H}^q(V', \mathcal{F}_m)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(V, \mathcal{F}_m),$$

plus un morphisme de la première vers la deuxième. Nous en tirons un morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}^1(\mu_m, \mathcal{F}_m(U') & \hookrightarrow & \mathrm{H}^1(U, \mathcal{F}_m) & \to & \mathrm{H}^1(U', \mathcal{F}_m)^{\mu_m} & \to & \mathrm{H}^2(\mu_m, \mathcal{F}_m(U') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1(\mu_m, \mathcal{F}_m(V') & \hookrightarrow & \mathrm{H}^1(V, \mathcal{F}_m) & \to & \mathrm{H}^1(V', \mathcal{F}_m)^{\mu_m} & \to & \mathrm{H}^2(\mu_m, \mathcal{F}_m(V')
\end{array}$$

Comme $\mathcal{F}_m$ est constant sur U' et sur V', qui sont connexes, les premières et dernières colonnes de ce diagramme sont des isomorphismes. Via la suite de Kummer, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^1(U', \mathcal{F}_m) &= \mathcal{F}_m(U')(-1) \otimes \mathrm{H}^1(U', \mu_m) = \mathcal{F}_m(U')(-1) = \mathcal{F}_m(V')(-1) \\
&= \mathrm{H}^1(V', \mathcal{F}_m),
\end{aligned}$$

où toutes les égalités sont compatibles avec les actions de μ_m. Il en résulte que la troisième colonne est également un isomorphisme, et donc la deuxième aussi. Ceci termine la preuve du Lemme 3.16. Notons que nous aurions pu aussi utiliser directement le théorème de pureté relative [De5, Thm. 3.4, p. 62]. □

Corollaire 3.17. *Soit f une nouvelle forme propre parabolique de poids $k \geq 2$. Supposons que la représentation galoisienne $\rho_{f,p}^\vee$ de G_p ne soit pas dans la cohomologie de la fibre spéciale. Alors l'image de la représentation $\rho_{f,p}^\vee$ dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$, $\rho_{f,p,\mathrm{e}}^\vee$ est irréductible de dimension 1 ou 2, et dans le premier cas $\rho_{f,p}$ est réductible indécomposable.*

Preuve. On note ρ pour $\rho_{f,p}^\vee$ et V le sous-espace correspondant de H^1. Supposons que l'on ait $V \cap \mathrm{H}^1_s = \{0\}$. Il faut montrer que ρ est nécéssairement irréductible. Cela revient à montrer d'après la classification des représentations galoisiennes donnée au chapitre 1 que les cas décomposable et indécomposable réductible ne peuvent pas se produire. Si on se place dans l'un quelconque de ces cas, on dispose d'une droite V' dans V sur laquelle l'action de Galois est donnée par un caractère α. Comme α est continu, il existe un entier n tel que α devient non ramifié sur $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Mais, dans ce cas il y a contradiction car les invariants sous le groupe d'inertie $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\zeta_{p^n}))$ sont en niveau n dans la cohomologie de la fibre spéciale. Si on suppose maintenant $\rho \cap \mathrm{H}^1_s$ de dimension 1, alors l'image de ρ dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ est aussi de dimension 1, et par le même argument ρ ne peut être décomposée. Aussi, dans ce cas ρ est bien réductible indécomposable. □

4 La fibre spéciale

L'objet est ici d'étudier la structure de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ module du $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel H^1_s. Pour cela, on étudie dans un premier temps la fibre spéciale $X_{n,s}$ du schéma X_n construit au chapitre précédent, puis les différentes actions de groupes sur celle-ci et sur sa normalisation $\tilde{X}_{n,s}$. Ensuite, on s'intéresse à la description comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$-module du groupe de cohomologie $\tilde{\mathrm{H}}^1_s$ sur la normalisation. Pour finir, on étudie la structure de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$-module du noyau du morphisme de H^1_s dans $\tilde{\mathrm{H}}^1_s$.

4.1 Description de la fibre spéciale

Soit $X_n = \coprod_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} X_n^a$ le schéma sur $T_n = \mathrm{Spec}(W[\zeta_{p^n}])$ défini au chapitre précédent, où $W = \mathbb{Z}_p^{\mathrm{nr}}$. Sa fibre spéciale est donnée par $X_{n,s} = \coprod_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*} X_{n,s}^a$. La description de la fibre spéciale du schéma X_n^a se trouve dans [KaMa, chap.13.7]. Ses composantes irréductibles sont les courbes $C_n^{a,b}$ où b parcourt la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Une courbe $C_n^{a,b}$ est la courbe de modules associée au problème de modules $\mathcal{P}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour lequel $\mathcal{P}(E/S/\overline{\mathbb{F}}_p)$ est l'ensemble des couples (ϕ, α) où ϕ est une $\Gamma(p^n)$-structure sur E/S vérifiant $\phi(b) = 0$, b étant vu comme une droite dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, et α une $\Gamma_1(N)$-structure sur E/S. Ces composantes irréductibles s'intersectent exactement à chaque point supersingulier de $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N))_{\mathrm{s}}$ et on sait calculer le complété local de $X_{n,s}^a$ en un tel point ([KaMa, chap.13.7]). Notons que, comme X_n est régulier, X_n n'a pas réduction semi-stable sur T_n. Nous n'aurons pas besoin des détails de la description de X_n de [KaMa, chap.13.7] ; il nous suffit de savoir que X_n est lisse sur T_n en dehors des points supersinguliers, et que tous les $C_n^{a,b}$ avec a fixé s'intersectent en tous leurs points supersinguliers.

Soit n un entier, on dispose sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ d'un problème de modules noté $\mathrm{ExIg}(p^n, n)$ dont les structures de niveau pour une courbe elliptique $E/S/\overline{\mathbb{F}}_p$ sont les points $P \in E(S)$ tels que (O, P) soit une p^n-base de Drinfeld ([KaMa, 12.10]). Ce problème est isomorphe de façon exotique, i.e., sans préserver le morphisme canonique sur la droite des j-invariants, à la courbe d'Igusa $\mathrm{Ig}(p^n)$. Ceci explique la notation (voir [KaMa, chap.10, chap.12] pour plus de détails).

Le problème de modules $\mathrm{ExIg}(p^n, n)$ est lié aux courbes modulaires $C_n^{a,b}$ de la façon suivante : soit b dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, on choisit un élément $\Lambda_b \in \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ qui est surjectif et qui vérifie $\mathrm{Ker}\Lambda_b = b$. Plus précisément : si $b = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -x \end{smallmatrix}\right)$ on prend $\Lambda_b : \left(\begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix}\right) \to xe + f$ et si $b = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).\left(\begin{smallmatrix} -py \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ on prend $\Lambda_b : \left(\begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix}\right) \to fpy + e$. Ce choix nous donne un isomorphisme entre $C_n^{a,b}$ et la courbe modulaire $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N), \mathrm{ExIg}(p^n, n))$ en associant à une classe $(E/S/\overline{\mathbb{F}}_p, \phi, \alpha)$ la classe $(E/S/\overline{\mathbb{F}}_p, \alpha, \overline{\phi}(1))$ où $\overline{\phi}$ est l'unique morphisme de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ dans $E(S)$ vérifiant $\overline{\phi} \circ \Lambda_b = \phi$.

Remarque 4.2. *De ces isomorphismes, on déduit que les courbes $C_n^{a,b}$ sont connexes, lisses sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, finies plates sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N))_s$ ([KaMa, ch.12]).*

Remarque 4.3. *On connait ainsi la normalisation de $X_{n,s}$, il s'agit de $\coprod_{a,b} C_n^{a,b}$ où a parcourt $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et b parcourt $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.*

4.4 Actions sur la fibre spéciale

Commençons par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, g agit à droite sur $X_{n,s} = \coprod_a X_{n,s}^a$ par :

$$(a, (E, \phi, \alpha)).g = (a\mathrm{det}g, (E, \phi \circ g, \alpha)).$$

Avec les notations du paragraphe précédent, g induit un isomorphisme entre les composantes $C_n^{a,b}$ et $C_n^{a\det(g), g^{-1}.b}$ de $X_{n,s}$. Par suite $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ permute transitivement les composantes $C_n^{a,b}$ de $X_{n,s}$. Le stabilisateur d'une composante $C_n^{a,b}$ est le sous-groupe de Borel dans $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ associé à b. Si on utilise un isomorphisme du paragraphe précédent entre $C_n^{a,b}$ et $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N), \mathrm{ExIg}(p^n, n))$ l'action de g appartenant au stabilisateur de $C_n^{a,b}$ via cet isomorphisme donne une action sur la courbe $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N), \mathrm{ExIg}(p^n, n))$. Notons χ le caractère donnant l'action du stabilisateur de b dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sur la droite b, i.e., pour tout x dans b on a $g^{-1}x = \chi(g^{-1})x$. L'action de g est alors donnée par l'opérateur losange $\langle \chi(g^{-1}) \rangle$ sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N), \mathrm{ExIg}(p^n, n))$, i.e., à $(E/S, P, \alpha)$ est associé $(E/S, \chi(g^{-1}).P, \alpha)$. Prenons par exemple $b = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).\binom{1}{0}$, i.e., $b = \infty$, le sous-groupe de Borel qui stabilise $C_n^{a,b}$ est l'ensemble des matrices $g = \left(\begin{smallmatrix} c & * \\ 0 & c^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, et l'action sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(N), \mathrm{ExIg}(p^n, n))$ d'un tel élément est donnée par : $(E/S, P, \alpha).g = (E/S, c^{-1}.P, \alpha)$. Notons que l'action se factorise donc par le quotient par le sous groupe des unipotents, i.e., des éléments de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}[\zeta_{p^n}]/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ opère sur X_n, de façon compatible avec son action sur T_n. Cette action induit une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}[\zeta_{p^n}]/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ sur $X_{n,s}$, compatible avec l'action triviale sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Elle est donnée par permutation des composantes $X_{n,s}^a$. Soit $x \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, x agit en envoyant la composante $X_{n,s}^a$ sur la composante $X_{n,s}^{a.x^{-1}}$.

4.5 Actions sur la normalisation

Notons $\tilde{X}_{n,s}$ la normalisation de la courbe $X_{n,s}$. On sait que $\tilde{X}_{n,s}$ est égal à $\coprod_{a,b} C_n^{a,b}$ avec a parcourant $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et b parcourant $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

On pose

$$\tilde{\mathrm{H}}^1_{n,s} = \mathrm{H}^1(\tilde{X}_{n,s}, \mathcal{F}_{k,s}) = \oplus_{a,b}\mathrm{H}^1(C_n^{a,b}, \mathcal{F}_k)$$

On a vu que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ permute transitivement les composantes de cette somme directe. Le stabilisateur de $\coprod_a C_n^{a,\infty}$ est par les calculs précédents le sous groupe B de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ formé des matrices triangulaires supérieures. Il en résulte que :

$$\tilde{\mathrm{H}}^1_{n,s} \simeq \mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})} \left(\oplus_a \mathrm{H}^1(C_n^{a,\infty}, \mathcal{F}_k)\right),$$

en tant que représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. L'action du sous-groupe des éléments unipotents de B étant triviale sur $\oplus_a \mathrm{H}^1(C_n^{a,\infty}, \mathcal{F}_k)$, $\tilde{\mathrm{H}}^1_{n,s}$ se décompose en une somme de $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\alpha, \beta)$, où on note, pour α et β des caractères de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, (α, β) le caractère de B défini par $(\alpha,\beta)((\begin{smallmatrix} x & * \\ 0 & y \end{smallmatrix})) = \alpha(x)\beta(y)$.

Comme I_p-module, $\tilde{\mathrm{H}}^1_{n,s}$ se décompose en somme directe de caractères δ de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$.

Le stabilisateur de la composante $C_n^{1,\infty}$ pour l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \times \mathrm{I}_p$, est le sous groupe $H = \{(g, x)$ où $g \in B$ et $\det(g) = x\}$. Le fait que ce stabilisateur soit le graphe du morphisme déterminant sur B a des conséquences intéressantes.

Proposition 4.6. *Soient α et β deux caractères de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ tels que le produit $\alpha.\beta^{-1}$ soit primitif. Alors la représentation $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\alpha, \beta)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est irréductible. Supposons que la représentation*

$$\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\alpha, \beta) \otimes \delta$$

du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \times \mathrm{I}_p$ intervienne dans $\tilde{\mathrm{H}}^1_{n,s}$. Alors le caractère δ est égal soit au caractère α^{-1}, soit au caractère β^{-1}.

Preuve. Le caractère $\alpha\beta^{-1}$ étant primitif, on peut vérifier en utilisant le critère de Mackey ([Se3]) que cette représentation est irréductible. Comme H est le stabilisateur de $C_n^{1,\infty}$, on a :

$$\tilde{\mathrm{H}}^1_{n,s} = \mathrm{ind}_H^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\times \mathrm{I}_p} \mathrm{H}^1(C_n^{1,\infty}, \mathcal{F}_k).$$

L'action du sous-groupe H' de H des élements de la forme $(\begin{smallmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), c)$ sur $(C^{1,\infty}, \mathcal{F}_k)$ est triviale. Par réciprocité de Frobenius, la représentation $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\alpha, \beta) \otimes \delta$ a des H'-invariants non nuls. Nous identifions H avec B via le morphisme $b \mapsto (b, \det(b))$, et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ avec son image dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \times \mathrm{I}_p$ via le morphisme $g \mapsto (g, \det(g))$. Alors la restriction à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ de $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\alpha, \beta) \otimes \delta$ est $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\alpha\delta, \beta\delta)$. Cela implique par quelques calculs que soit $\alpha = \delta^{-1}$ soit $\beta = \delta^{-1}$. $\square$

Remarque 4.7. *En dehors du cas $\alpha.\beta^{-1}$ primitif, la situation est encore plus délicate et calculatoire. Il existe des liens entre les caractères δ, α et β mais ceux-ci sont beaucoup plus complexes et peu intéressants.*

Revenons pour terminer ce paragraphe aux formes modulaires. Soient $N > 4$ un entier, p un nombre premier ne divisant pas N, k un entier supérieur ou égal à deux. On se donne ε un caractère de $(\mathbb{Z}/Np^n\mathbb{Z})^*$ et f une forme propre (pas nécessairement nouvelle) de type (p^nN, k, ε) à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Nous supposons que la nouvelle forme f' associée à f est de niveau p^nN' avec N' premier à p (et donc divisant N). On associe alors à f une représentation π_f^n irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ comme suite. On considère le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N)), \underline{\omega}^{\otimes k}(-\mathrm{Cusps}))$. Il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et il contient pr^*f où pr est la projection naturelle de $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N))$ sur $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma_1(p^nN))$. On appelle π_f^n la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ engendrée par pr^*f. Montrons qu'elle est en effet irréductible. Soit $\pi_f^n = V = \oplus_{i=1}^r V_i$ une décomposition en irréductibles, et écrivons $\mathrm{pr}^*f = (v_1, \ldots, v_r)$. Comme pr^*f engendre V, on a $v_i \neq 0$ pour tout i. Notons G_1 le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ des éléments de le forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, de la sorte que pr est le quotient pour G_1. Comme chaque v_i est dans V^{G_1}, if suffit de montrer que V^{G_1} est de dimension au plus un. Mais cela résulte du principe de multiplicté un.

Corollaire 4.8. *Supposons que $\rho_{f,p}^\vee \otimes \pi_f^n \subset \tilde{\mathrm{H}}_{n,s}^1$ et que la représentation π_f^n soit de la forme $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\alpha, \beta)$. Alors la restriction de la représentation ρ_f à l'inertie en p vaut $\rho_{f\,|\mathrm{I}_p} = \alpha \oplus \beta$.*

Preuve. On note $\rho = \rho_{f,p|\mathrm{I}_p}$. Par hypothèse, la représentation π_f^n est irréductible aussi le produit $\alpha\beta^{-1}$ est un caractère primitif. Ecrivons $\rho = \delta \oplus \delta'$. On alors par la proposition précédente $\{\delta, \delta'\} \subset \{\alpha, \beta\}$. En utilisant $\det(\rho) = \varepsilon = \alpha\beta$, on voit que $\rho = \alpha \oplus \beta$. □

4.9 Actions sur la limite $\tilde{\mathrm{H}}_s^1$

De façon analogue à 3.10, on note $\tilde{\mathrm{H}}_s^1$ la limite inductive sur les entiers n des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels $\tilde{\mathrm{H}}_{n,s}^1 = \mathrm{H}^1(\tilde{X}_{n,s}, \tilde{\mathcal{F}}_{k,s})$. On dispose d'un morphisme surjectif de H_s^1 dans $\tilde{\mathrm{H}}_s^1$ dont on étudiera le noyau au prochain paragraphe. On peut écrire le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\tilde{\mathrm{H}}_s^1$ de la façon suivante : $\tilde{\mathrm{H}}_s^1 = \varinjlim_n \oplus_{a,b} \mathrm{H}^1(C_n^{a,b}, \mathcal{F}_k)$, avec a parcourant $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et b parcourant $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Cet espace est muni d'une action du produit des groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et G_p. Précisons ces actions.

L'action du groupe G_p sur $\tilde{\mathrm{H}}_s^1$ se fait à travers le quotient par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}(\mu_{p^\infty}))$. Aussi cette action de G_p se fait par son abélianisé

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}_p)$, que l'on identifie au produit

$$\mathbb{Z}_p^* \times \widehat{\mathbb{Z}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbb{Q}_p)$$

(cf 1.1). L'action de $\mathbb{Z}_p^*$ se fait par permutation de composantes. Plus précisément, $x \in \mathbb{Z}_p^*$ opère sur les ensemble des composantes par multiplication par x^{-1}. L'action du frobenius ϕ se fait par l'inverse du frobenius géométrique F ([Mi, p292], [Gr, 5.XV]).

D'autre part, le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\tilde{\mathrm{H}}_s^1$ est muni naturellement d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, que l'on étend de façon analogue à 2.7, en une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Précisons l'action de l'élément $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur la limite sur n des courbes $C_n^{a,\infty}$. Fixons un entier $n \geq 1$, un élément a de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$. Soit $(E, (O, P_n), \alpha)$, un élément de $C_n^{a,\infty}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. On le relève en (E_0, ϕ_n, α) élément de $X_n^a(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On considère $A_n = \phi_n(1,0)$ et $B_n = \phi_n(0,1)$ une base de $E_0[p^n]$. On pose $A_1 = p^{n-1}A_n$. On appelle π l'isogénie canonique de E_0 dans E_0/A_1 et on pose $A'_{n-1} = \pi(A_n)$, $B'_{n-1} = \pi(pB_n)$. On a :

$$(E_0, (A_n, B_n), \alpha). \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (E_0/A_1, (A'_{n-1}, B'_{n-1}), \alpha').$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} e_{p^{n-1}}(A'_{n-1}, B'_{n-1}) &= e_{p^{n-1}}(\pi(A_n), \pi(B_{n-1})) \\ &= e_{p^{n-1}}(\pi^{\mathrm{t}} \circ \pi(A_n), B_{n-1}) \\ &= e_{p^{n-1}}(p(A_n), B_{n-1}) \\ &= e_{p^{n-1}}(A_{n-1}, B_{n-1}). \end{aligned}$$

Replaçons nous sur la fibre spéciale. On remarque alors que l'isogénie π se réduit en π_s isogénie de degré p, de noyau réduit à un point $\{O\}$, en particulier connexe, π_s est donc le frobenius relatif de E dans $E^{(p)}$. Aussi, $(E, (O, P_n), \alpha).\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (E^{(p)}, (O^{(p)}, P_{n-1}^{(p)}), \alpha^{(p)})$. Posons $W^\infty = \varinjlim_n \oplus_a \mathrm{H}^1(C_n^{a,\infty}, \mathcal{F})$. On en déduit que l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur W^∞ se fait par le frobenius géométrique F.

Proposition 4.10. *La représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\tilde{\mathrm{H}}_s^1$ est induite du sous groupe de Borel $B(\mathbb{Q}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures par des représentations de $B(\mathbb{Q}_p)$ du type (α, β) où α et β sont des caractères de $\mathbb{Q}_p^*$.*

Preuve. Posons :

$$C^\infty := \varprojlim_n \coprod_a C_n^{a,\infty}.$$

Notons que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = B(\mathbb{Q}_p).\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et que $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B(\mathbb{Z}_p)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ engendrent $B(\mathbb{Q}_p)$. On trouve alors que $B(\mathbb{Q}_p)$ est le stabilisateur dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de C^∞. En plus, l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ sur C^∞ et W^∞ se font modulo les éléments unipotents. Aussi l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ sur W^∞ est décomposable en représentations de la forme (α, β) où α et β sont des caractères de $\mathbb{Q}_p^*$. On veut montrer que $\tilde{\mathrm{H}}^1_s$ est égal à l'ensemble des fonctions f localement constantes à support compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans W^∞ vérifiant pour tout $b \in B(\mathbb{Q}_p)$ et tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ la relation $f(b.g) = b.f(g)$. En utilisant la décomposition de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en $B(\mathbb{Q}_p).\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ cet espace est l'espace des fonctions f localement constantes à support compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ dans W^∞ vérifiant pour tout $b \in B(\mathbb{Z}_p)$ et tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ la relation $f(b.g) = b.f(g)$. Or, si on appelle K_n le sous groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ formé des élément congrus à l'identité modulo p^n, on peut écrire $\tilde{\mathrm{H}}^1_s = \varinjlim_n (\tilde{\mathrm{H}}^1_s)^{K_n}$. On a $(\tilde{\mathrm{H}}^1_s)^{K_n} = \tilde{\mathrm{H}}^1_{n,s}$ et $W^\infty = \varinjlim_n (W^\infty)^{K_n} = W^{\infty,n}$ en niveau fini p^n. Or on a montré $(\tilde{\mathrm{H}}^1_s)^{K_n} = \{f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to W^{\infty,n}$ vérifiant $f(b.g) = b.f(g)$ pour tout $b \in B(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\}$. Cela montre le résultat. □

Considérons maintenant l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ sur $\tilde{\mathrm{H}}^1_s$. Notons $W^{1,\infty}$ la composante $\varinjlim_n \mathrm{H}^1(C^{1,\infty}_n, \mathcal{F}_k)$. En utilisant la décomposition de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en $B(\mathbb{Q}_p).\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, les calculs précédents : calculs de l'actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ en niveau fini et de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on trouve que le stabilisateur de $W^{1,\infty}$ pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ est le sous groupe H des éléments de la forme (g, σ) vérifiant $\det(g) = \sigma$. Notons que l'action des éléments de la forme $(\left(\begin{smallmatrix} x & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \det(x))$ est triviale. De façon analogue à la proposition précédente, on peut montrer que $\tilde{\mathrm{H}}^1_s = \mathrm{ind}_H^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times \mathrm{G}_p} W^{1,\infty}$.

Proposition 4.11. *Soient α et β deux caractères de $\mathbb{Q}_p^*$ tels que $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\alpha, \beta)$ soit irréductible. Supposons que la représentation (irréductible) $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\alpha, \beta) \otimes \delta$ du groupe produit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ soit un sous-quotient de $\tilde{\mathrm{H}}^1_s$. Alors on a $\delta^{-1} = \alpha$ ou $\delta^{-1} = |\ |_p \beta$.*

Preuve. La restriction de la représentation $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\alpha, \beta) \otimes \delta$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ plongé dans le produit par le morphisme $g \mapsto (g, \det g)$ vaut $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\alpha\delta, \beta\delta)$. Par hypothèse, cette restriction est incluse dans une représentation induite du type $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_{\mathrm{triv}}, \gamma)$. On doit donc avoir (cf. 2.6) soit $\alpha\delta = \chi_{\mathrm{triv}}$, soit $\beta\delta = |\ |_p^{-1}$. □

Revenons pour terminer ce paragraphe aux formes modulaires.

Proposition 4.12. *Soient N un entier, p un nombre premier ne divisant pas N, $k \geq 2$ et $n \geq 0$ des entiers. On se donne ε un caractère de $(\mathbb{Z}/Np^n\mathbb{Z})^*$ et f une nouvelle forme propre de type (p^nN, k, ε) à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Supposons que $\rho_{f,p}^\vee \subset \mathrm{H}_s^1$, que le morphisme $\rho_{f,p}^\vee \to \tilde{\mathrm{H}}_s^1$ soit injectif, et que $\pi_{f,p}$ soit de la série principale de la forme $\pi_{f,p} = \mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\alpha, \beta)$. Alors la F-semisimplifiée de $\rho_{f,p}$ s'écrit $\delta \oplus \delta'$ avec $\delta = \alpha|\ |_p^{-1}$ et $\delta' = \beta$, ce qui veut dire que $\rho_{f,p}$ est réductible, décomposable après restriction à l'inertie, avec constituants δ et δ'. Rappelons que l'on sait que $\rho_{f,p}$ est F-semisimple si $k = 2$.*

Preuve. Notons δ et δ' les deux caractères de G_p intervenants dans $\rho_{f,p}$. Notons α et β les deux caractères de $\mathbb{Q}_p^*$ tel que

$$\pi_{f,p} = \mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\alpha|\ |_p^{-1}, \beta|\ |_p^{-1}).$$

La proposition précédente implique l'inclusion de l'ensemble $\{\delta, \delta'\}$ dans l'ensemble $\{\alpha|\ \ |_p^{-1}, \beta\}$. Or, le caractère central de $\pi_{f,p}$ est égal au déterminant de $\rho_{f,p}$ fois $|\ |_p$ (2.15, 2.7), autrement dit $\delta\delta' = \alpha\beta|\ |_p^{-1}$. Cela donne le résultat. □

4.13 Le cas spécial

Pour finir l'étude de la fibre spéciale, il reste à étudier la structure de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$-module du noyau du morphisme de $\mathrm{H}_s^1 \to \tilde{\mathrm{H}}_s^1$. Soit n un entier, on note r le morphisme de normalisation en niveau fini de $\tilde{X}_{n,s}$ dans $X_{n,s}$, on dispose d'une suite exacte de faisceaux sur $X_{n,s,\mathrm{et}}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k,s} \longrightarrow r_*r^*\mathcal{F}_{k,s} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

Le faisceau $\mathcal{G}$ est à support dans les points supersinguliers de $X_{n,s}$, et en un tel point x sa fibre $\mathcal{G}_x$ est une somme directe de $|\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})|$ copies de $\mathcal{F}_x$ quotientée par $\mathcal{F}_x$ plongé diagonalement dans cette somme. On note K_n le module des sections globales de ce faisceau. On dispose d'une suite exacte longue de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow K_n \longrightarrow \mathrm{H}_{n,s}^1 \longrightarrow \tilde{\mathrm{H}}_{n,s}^1 \longrightarrow 0$$

avec $G_n = 0$ si $k > 2$ et $G_n(-1) = G'_n$ pour $k = 2$ (3.11). Notons V_n le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel égal à la somme directe sur $b \in \mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ de la somme directe des $\mathcal{F}_x$ sur x parcourant les points supersinguliers de $X_{n,s}$. On a un morphisme surjectif $\mathrm{G}_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-équivariant de V_n dans K_n. Etudions la structure de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-module de V_n. On note V_n^∞ le terme de V_n indexée par ∞. Le "stabilisateur" de V_n^∞ est de façon analogue à la section précédente le sous-groupe $B(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Et l'action de $b \in B(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sur la composante V_n^∞ se fait simplement par le déterminant. On peut donc écrire V_n comme une somme de représentations de la forme $\alpha.\mathrm{ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})}(\chi_{\mathrm{triv}}, \chi_{\mathrm{triv}})$ avec α caractère de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$. L'action sur le noyau du morphisme de V_n dans K_n est une somme de représentations de la forme α, de façon compatible avec la précédente décomposition de V_n.

L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \times \mathrm{I}_p$ est induite du sous groupe H des éléments de la forme $(g, \det(g))$ agissant sur la composante $V_n^{1,\infty}$. Or cette action est triviale. En conséquence, V_n se décompose en somme de représentations $\mathrm{ind}_H^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\times \mathrm{I}_p}(\chi_{\mathrm{triv}})$, et par suite K_n en somme de représentation quotient $\mathrm{ind}_H^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\times \mathrm{I}_p}(\chi_{\mathrm{triv}})/\chi_{\mathrm{triv}}$.

Passons à la limite inductive sur n. En notant $K = \varinjlim_n K_n$, $V = \varinjlim_n V_n$ et $G = \varinjlim_n G_n$, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{H}^1_s \longrightarrow \tilde{\mathrm{H}}^1_s \longrightarrow 0$$

avec $G = 0$ si $k > 2$ et $G(-1) = G'$ pour $k = 2$ (3.11). On déduit de façon analogue à la section précédente et par les calculs ci-dessus que K se décompose alors en somme de représentations $\mathrm{ind}_H^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times \mathrm{G}_p}(\chi_{\mathrm{triv}})/\chi_{\mathrm{triv}}$, où H est le sous-groupe des éléments de la forme $(g, \det(g))$. Ces résultats appliqués aux formes modulaires nous donne le résultat suivant.

Proposition 4.14. *Soient N un entier, p un nombre premier ne divisant pas N, $k \geq 2$ et $n \geq 0$ des entiers. On se donne ε un caractère de $(\mathbb{Z}/Np^n\mathbb{Z})^*$ et f une nouvelle forme propre de type (p^nN, k, ε) à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Supposons que $\rho_{f,p}^\vee$ est contenu dans H^1_s, et est d'intersection non nulle avec K. Alors $\rho_{f,p}^\vee \cap K$ est de dimension 1 et la représentation $\pi_{f,p}$ est de la série spéciale. Si on a $\pi_{f,p} = \alpha.\mathrm{Sp}$, alors cette intersection est le caractère α^{-1}.*

Preuve. Notons que $\rho_{f,p}^\vee$ est d'intersection nulle avec G car si $k > 2$ on a $G = 0$ et, si $k = 2$, G est "Eisenstein", au sens où les valeurs propres des opérateurs de Hecke T_q pour q premier ne pas divisant p^nN sont de module $q+1$ (3.9). Or celle de f vérifient $|a_q| < 2q^{1/2}$. Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-module K se décompose en une somme de représentations irréductibles du type $\alpha.\mathrm{Sp}$. Comme représentation de G_p, K est somme de caractères δ. Il s'ensuit que K s'écrit comme une somme $\alpha\mathrm{Sp}\otimes\delta$. Or la restriction à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ vu comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times\mathrm{G}_p$ par le morphisme envoyant $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur le couple $(g, \det(g))$ est la représentation $\alpha\delta\mathrm{Sp}$. Or on sait que cette restriction est contenue dans une représentation du type Sp. Par suite $\alpha = \delta^{-1}$.

Montrons maintenant que $\rho_{f,p}^\vee \cap K$ est de dimension un. Supposons donc que $\rho_{f,p}^\vee \subset K$. Alors $\rho_{f,p} = \alpha \oplus \alpha$, et $\pi_{f,p} = \mathrm{Sp}.\alpha$. On a alors

$\alpha^2 = \det(\rho_{f,p}) = \chi_{\text{centr.}}(\pi_{f,p})|\ |_p = \alpha^2|\ |_p$, donc $1 = |\ |$, ce qui est une contradiction. Donc $\rho_{f,p}^{\vee} \cap K$ est bien de dimension un. $\square$

5 Les cycles évanescents

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'espace des cycles évanescents $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$. Dans un premier temps, on rappelle les liens existants entre ces cycles évanescents et des espaces de déformations infinitésimales de courbes elliptiques munies de structures de niveau (5.1). Puis, on étudie en détail les différentes actions sur ces cycles évanescents, et on construit des actions d'algèbres de quaternions (5.2). Enfin, on calcule explicitement, via certains choix d'isogénies, l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des cycles évanescents. Ce calcul permet d'obtenir une correspondance entre des représentations irréductibles admissibles de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ et les représentations admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ intervenant dans l'espace des cycles évanescents (5.10).

5.1 Cycles évanescents et déformations

On note $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, K son corps des fractions. Rappelons quelques conséquences du théorème de Serre-Tate ([Ka1, Chap.Vbis], [KaMa, Th.2.9.1]). Considérons (A, m_A) une $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$. La catégorie des courbes elliptiques sur A est équivalente à la catégorie des triplets (E, G, i) où E est une courbe elliptique sur $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, G un groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}(A)$, et i un isomorphisme de $E[p^\infty]$ sur $G \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A/m_A)$. Le foncteur envoyant la courbe elliptique C sur $(C_{\overline{\mathbb{F}}_p}, C[p^\infty], \mathrm{id})$ donne l'équivalence des catégories. Ces deux catégories sont aussi équivalentes à la catégorie des quadruplets $(E, G, \langle,\rangle, i)$ où E est une courbe elliptique sur $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, G un groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}(A)$, $\langle,\rangle$ une famille compatible d'accouplements $\langle,\rangle_{p^n}$ sur $G[p^n]$, et i un isomorphisme de $E[p^\infty]$ sur $G \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A/m_A)$ transportant la famille des accouplements de Weil $(e_{p^n})_n$ sur $\langle,\rangle$. (De tels accouplements sont parfaits et alternés.)

Soient N entier, $N \geq 4$ et p ne divisant pas N, et y un élément de $Y_1(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)$, i.e., une classe d'isomorphisme d'un couple (E, P) où E est une courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et P un point d'ordre N de E. On rappelle que le spectre du complété de l'anneau local $O_{X_1(N)_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}, y}$, que l'on notera D_y, s'interprète comme l'espace de déformations infinitésimales du couple (E, P). Plus précisément, considérons la catégorie $\mathcal{D}$ dont les objets sont les diagrammes cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} (E,P) & \xrightarrow{f} & (C,Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \to & \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

où A est une $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$-algèbre noethérienne locale complète de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$, C une courbe elliptique sur $\mathrm{Spec}(A)$, Q une $\Gamma_1(N)$-structure sur C, et f un morphisme envoyant P sur Q. (Notons que dans cette situation Q est déterminé par P et f.) Une flèche entre deux objets de la catégorie $\mathcal{D}$,

$$\begin{array}{ccc} (E,P) & \xrightarrow{f} & (C,Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \rightarrow & \mathrm{Spec}(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} (E,P) & \xrightarrow{f'} & (C',Q') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \rightarrow & \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

est la donnée de deux morphismes : le premier de (C,Q) dans (C',Q'), et le deuxième de $\mathrm{Spec}(A)$ dans $\mathrm{Spec}(A')$, rendant les diagrammes nécessaires commutatifs. Cette catégorie admet un objet final, appelé déformation universelle du couple (E,P),

$$\begin{array}{ccc} (E,P) & \rightarrow & (\mathbf{E}_{\mathrm{univ}}, \mathbf{P}_{\mathrm{univ}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \rightarrow & D_y \end{array}$$

En utilisant le théorème de Serre-Tate sous la forme précédemment rappelée, on voit que l'on dispose aussi d'une déformation universelle :

$$\begin{array}{ccc} E[p^\infty] & \rightarrow & G_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \rightarrow & D_y \end{array}$$

objet final de la catégorie dont les objets sont les diagrammes cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} E[p^\infty] & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \rightarrow & \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

où : A est une $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$-algèbre noethérienne locale complète de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$, G un groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}(A)$.

Soient n un entier et a un élément de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$. On note $K_n = K[\zeta_{p^n}]$ et on considère $D_{y,n,a}$ l'espace des déformations infinitésimales munies d'une $\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}$-structure. On a alors $D_{y,n,a} = \Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}_{G_y/D_y}$. On note $D_{y,n,a,\overline{K}_n}$ le schéma $D_{y,n,a} \times_{\mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\zeta_{p^n}])} \mathrm{Spec}(\overline{K}_n)$. Pour $k \geq 2$ entier, on note $\mathcal{F}_k$ le faisceau constant $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{H}^1(E, \overline{\mathbb{Q}}_l))$ sur le site étale $\mathrm{Spec}(D_{y,n,a})_{\mathrm{et}}$. On pose :

$$\phi_{y,n,a} = \mathrm{H}^1(D_{y,n,a,\overline{K}_n}, \mathcal{F}_{k,\overline{K}_n}), \quad \Psi_{y,n} = \oplus_a \phi_{y,n,a}, \quad \Psi_y = \lim_{\rightarrow_n} \Psi_{y,n}.$$

Rappelons que l'on avait posé au chapitre 3, $T_n = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p^{\mathrm{nr}}[\zeta_{p^n}])$, η point générique de T_n, et $X_n = \coprod_{a\in(Z/p^n\mathbb{Z})^*} X_n^a$ où les schémas X_n^a sont les courbes $\overline{\mathcal{M}}(\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}, \Gamma_1(N))_{T_n}$. On avait noté X_n^{ss}, le sous-ensemble de $X_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, des classes de triplets (a, E, P) avec a un élément de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, E une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et P une $\Gamma_1(N)$-structure sur E. A un élément x de X_n^{ss} nous avons associé dans la partie 3.11, un espace de cycles évanescents $\psi_{x,n} = \mathrm{H}^1(\tilde{X}^x_{\overline{\eta}}, \mathcal{F}_{k,\overline{\eta}})$ où $\tilde{X}^x = \mathrm{Spec}(O^{\mathrm{h.s}}_{X_n,x})$ et $\mathcal{F}_k$ est le faisceau l-adique $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{H}^1(E, \overline{\mathbb{Q}}_l))$. En utilisant le résultat de Brylinski dans l'appendice de [Ca1, p. 462], on a un isomorphisme canonique entre l'espace des cycles évanescents $\psi_{x,n}$ et le groupe de cohomologie l-adique $\mathrm{H}^1(\hat{X}^x \times_{\hat{T}_n} \overline{\eta}, \hat{\mathcal{F}}_{k,\overline{\eta}})$, qui s'identifie à $\mathrm{H}^1(\hat{X}^x_{n,\overline{K}_n}, \mathcal{F}_{k,\overline{K}_n})$. Or $\hat{X}^x_n$ est égal à $D_{x,n,a}$ l'espace des déformations infinitésimales munies d'une $\Gamma(p^n)^{\zeta_{p^n}^a-\mathrm{can}}$-structure de la classe du couple (E, P). On obtient ainsi un isomorphisme canonique entre $\psi_{x,n}$ et $\phi_{x,n}$. En fin de compte, on dispose d'un isomorphisme canonique entre l'espace des cycles évanescents $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ et $\bigoplus_{y\in X_1^{\mathrm{ss}}(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)} \Psi_y$.

5.2 Les actions sur les cycles évanescents

On sait que l'on dispose sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ d'une action du groupe G_p et d'une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ces actions commutant entre elles. Décrivons ces actions sur $\bigoplus_{y\in X_1^{\mathrm{ss}}(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)} \Psi_y$. Commençons par l'action du groupe de Galois G_p. On peut prendre comme clôture algébrique de K_n le corps $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}[\zeta_{p^n}]} K_n$ et on a $I_n := \mathrm{Gal}(\overline{K}_n/K_n) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}[\zeta_{p^n}])$; ce sont des résultats classiques d'analyse p-adique, conséquence du lemme de Krasner ([Bo, Chap. 3.4.2.]). Un élément σ de I_n agit à droite sur $D_{y,n,a,\overline{K}} = D_{y,n,a} \times_{\mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\zeta_{p^n}])} \mathrm{Spec}(\overline{K}_n)$ par $\mathrm{Id}\times\mathrm{Spec}(\sigma)$, puis à gauche sur $\phi_{y,n,a}$ par $(\mathrm{Id}\times\mathrm{Spec}(\sigma))^*$.

D'autre part, on a l'action sur le $W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\zeta_{p^n}]$-schéma $\coprod_{y,a} D_{y,n,a}$, provenant de celle de G_p par le quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}[\zeta_{p^n}]/\mathbb{Q}_p)$ sur le schéma $\mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\zeta_{p^n}])$. Cette action s'étend diagonalement sur l'extension des scalaires à $\overline{K}_n$. En termes d'interprétation modulaire, i.e., en termes de déformations, cette action sur $\coprod_{y,a} D_{y,n,a}$ peut se décrire de la façon suivante. A $(G/S, \beta, \langle,\rangle, \phi, a)$ une déformation de y sur un $W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\zeta_{p^n}]$-schéma S,

$$\begin{array}{ccccc} E[p^\infty] & \xrightarrow{\beta} & G & \xleftarrow{\phi} & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2_S \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \rightarrow & S & & \end{array}$$

et σ dans G_p est associée la déformation du couple $y^{\sigma^{-1}}$ donnée par le

triplet :
$$(G^{\sigma^{-1}}/S^{\sigma^{-1}}, \beta^{\sigma^{-1}}, \langle,\rangle^{\sigma^{-1}}, \phi^{\sigma^{-1}}, \chi_p(\sigma^{-1})a),$$
avec $\chi_p\colon \mathrm{G}_p \to \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique p-adique, et où l'indice supérieure σ^{-1} signifie : obtenue par image réciproque par
$$\mathrm{Spec}(\sigma^{-1})\colon \mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\zeta_{p^n}]) \to \mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\zeta_{p^n}]).$$
On a la relation $\sigma(\det(\phi^{\sigma^{-1}})) = \det(\phi)$. Sur le faisceau, on utilise l'isomorphisme entre les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1(E,\overline{\mathbb{Q}}_l)$ et $\mathrm{H}^1(E^{\sigma^{-1}},\overline{\mathbb{Q}}_l)$ induit par le carré cartésien
$$\begin{array}{ccc} E^{\sigma^{-1}} & \tilde{\to} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \overset{\mathrm{Spec}(\sigma^{-1})}{\to} & \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) \end{array}$$
Passons à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Elle provient d'une action à droite sur le système des $\coprod_{y,a} D_{y,n,a}$. En fait, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ agit sur chaque schéma $\coprod_a D_{y,n,a}$ de la façon suivante (en termes de déformations) :
$$(y, G/S, \beta, \phi, \langle,\rangle, a).g = (y, G/S, \beta, \langle,\rangle, \phi \circ g, a\det(g))$$
Maintenant, soit g un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ tel que $g.\mathbb{Z}_p^2 \supset \mathbb{Z}_p^2$. Posons $m = v_p(\det(g^{-1}))$. Pour $n > m$, on définit une flèche de $\coprod_{y,a} D_{y,n,a}$ dans $\coprod_{y,b} D_{y,n-m,b}$ en associant à la déformation $(y, G/S, \beta, \langle,\rangle, \phi, a)$, la déformation $(y^{(p^m)}, G'/S, \beta', \langle,\rangle', \phi', a')$ obtenue comme suite. Notons $\pi\colon G \to G'$ l'isogénie de noyau engendré par $\phi(p^m g(p^{n-m}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)$. On a alors le diagramme :
$$\begin{array}{ccccc} E[p^\infty] & \overset{\beta}{\to} & G & \overset{\phi\circ p^m g}{\leftarrow} & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \\ \downarrow^{F^m} & & \downarrow^{\pi} & & \downarrow^{\mathrm{pr}} \\ E^{(p^m)}[p^\infty] & \overset{\beta'}{\to} & G' & \overset{\phi'}{\leftarrow} & (\mathbb{Z}/p^{n-m}\mathbb{Z})^2 \end{array},$$
et on a $a' = p^m \det(g)a$. Sur le faisceau, on utilise $\mathrm{Sym}^{k-2}(F^{m,*})$.

Remarque 5.3. *On peut vérifier que ces deux actions commutent ; soit par un calcul explicite, soit en remarquant que l'action de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *existe préalablement sur la complétion le long des points supersinguliers du schéma* $\varprojlim_n \mathcal{M}(\Gamma(p^n), \Gamma_1(N))_{\mathbb{Z}_p}$.

On dispose aussi sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}} \simeq \bigoplus_{y \in X_1^{\mathrm{ss}}(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)} \Psi_y$ d'une action de l'algèbre de Hecke. Pour tout nombre premier q distinct de p, on peut décrire l'action de l'opérateur de Hecke T_q^* sur $\bigoplus_{y\in X_1^{ss}(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)}\Psi_y$ comme suit. On remarque d'abord que si α est une isogénie de degré q de la courbe elliptique E dans une courbe elliptique E' telle que $\alpha(P)$ soit d'ordre N, α induit un isomorphisme de $E[p^\infty]$ sur $E'[p^\infty]$, donc un isomorphisme entre les schémas $D_{y,n}$ et $D_{y',n}$ où y est la classe d'isomorphisme du couple (E,P) et y' celle du couple $(E',\alpha(P))$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme que l'on notera α^* entre $\Psi_{y,n}$ et $\Psi_{y',n}$. Fixons n, et donnons nous pour tout y un élément $f(y)$ dans $\Psi_{y,n}$. Pour H sous groupe de E d'ordre q ne pas contenant P, on note π_H l'isogénie quotient de E dans E/H et y_H la classe du couple $(E/H,\pi_H(P))$. Avec ces notations, on a :

$$(T_l^*f)(y)=\sum_H(\pi_H^*)f(y_H)$$

la somme s'effectuant sur les sous groupes H de E d'ordre q ne pas contenant P. Cette action commute avec celles des groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et G_p, et est compatible avec la suite exacte des cycles évancescants.

Enfin, on dispose sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}\simeq\bigoplus_{y\in X_1^{ss}(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)}\Psi_y$, et cela est le fait nouveau de cette partie, d'actions d'algèbres de quaternions. Pour y classe du couple (E,P), on note $B_y=\mathrm{End}(E)$. On dispose naturellement d'une action de $\mathrm{Aut}(E[p^\infty])=B_y(\mathbb{Z}_p)^*$ sur $\Psi_{y,n}$, provenant de l'action à droite de $B_y(\mathbb{Z}_p)^*$ sur $\coprod_a D_{y,n,a}$: pour $b\in B_y(\mathbb{Z}_p)^*$, on pose en termes de déformations :

$$(y,G/S,\beta,\langle,\rangle,\phi,a).b=(y,G/S,\beta\circ b,\langle,\rangle^{N(b)},\phi,aN(b))$$

et on utilise l'identité sur le faisceau. On veut étendre cette action en une action de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ sur $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y}\Psi_{z,n}$, cette dernière somme (finie) s'effectue sur l'orbite de y classe d'un couple (E,P) sous l'action de Galois, i.e., du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. Soit $b\in B_y(\mathbb{Z}_p)-\{0\}$. On pose $r=v_p(N(b))$, et on appelle $\bar{b}$ l'isomorphisme de $E^{(p^r)}[p^\infty]\simeq E[p^\infty]$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E[p^\infty] \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "F^r"'] & & E[p^\infty] \\ & E^{(p^r)}[p^\infty] \arrow[ur, "\bar{b}"'] & \end{tikzcd}$$

On définit alors un isomorphisme entre $\coprod_a D_{y^{(p^s)},n,a}$ et $\coprod_a D_{y^{(p^{s+r})},n,a)}$ de la façon suivante : à une déformation

$$(y^{(p^s)},G/S,\beta,\langle,\rangle,\phi,a)$$

est associée la déformation :

$$(y^{(p^{s+r})},G/S,\beta\circ(\bar{b})^{(p^s)},\langle,\rangle^{N(\bar{b})},\phi,aN(\bar{b})).$$

Sur le faisceau, on utilise l'isomorphisme naturel $F^{r,*}$ de $\mathrm{H}^1(E^{(p^{s+r})}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans $\mathrm{H}^1(E^{(p^s)}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

Pour utiliser les formules ci-dessus pour définir une action de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$, il faut que les isomorphismes $D_{y^{(p^s)},n,a} \to D_{y^{(p^{s+r})},n,a)}$ ne dépendent pas de l'entier s choisi. Si tel est le cas, alors l'égalité $F^r b F^{-r} = b^{(p^r)}$ nous assure qu'on obtient une action du groupe $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ sur $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y}\Psi_{z,n}$ (calcul laissé au lecteur).

Proposition 5.4. *Sous l'hypothèse que l'orbite de y classe d'un couple (E, P) sous l'action de Galois est de cardinal pair, et que $\{1, -1\}$ sont les seuls automorphismes de E envoyant P dans $p^{\mathbb{Z}}P$, les formules précédentes définissent une action de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ sur $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y}\Psi_{z,n}$.*

Preuve. Il faut montrer que les formules en question ne dépendent pas du choix de l'entier s. Cela revient à montrer que si on suppose donné γ un isomorphisme de (E, P) dans $(E^{(p^s)}, P^{(p^s)})$, alors pour tout $b \in B_y(\mathbb{Q}_p)^*$, $\gamma^{-1}b^{(p^s)}\gamma = b$. Or $b^{(p^s)} = F^s b F^{-s}$, donc cela revient à $\gamma^{-1}\circ F^s$ dans le centre de $B_y(\mathbb{Q}_p)$. Ce qui nous donne nécessairement s pair, et en identifiant alors le couple $(E^{(p^s)}, P^{(p^s)})$ au couple $(E, p^{(s/2)}P)$, on obtient que γ doit être $\pm\mathrm{Id}$. □

Proposition 5.5. *Quitte à multiplier l'entier N par un nombre premier convenable, distinct de p et ne divisant pas N, l'hypothèse de la proposition ci-dessus est vérifiée pour tout y.*

Preuve. Il n'y a qu'un nombre fini de couples (E, P) sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à considérer. Pour chaque E, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments π de norme p dans $\mathrm{End}(E)$. Pour chaque tel π, on choisit un nombre premier modulo lequel le polynome minimal de π est irréductible. Si on multiplie N par le produit des premiers ainsi choisis, les orbites sont de cardinaux pairs. Si on multiplie ensuite avec un nombre premier qui est -1 modulo 12, l'hypothèse en question est vérifiée. □

Remarque 5.6. *On se place désormais dans la situation où les actions des algèbres de quaternions sont bien définies, i.e., où l'hypothèse de la Proposition 5.4 est vérifiée.*

Donnons maintenant quelques propriétés de la représentation que l'on vient de construire.

Proposition 5.7. *L'action du groupe $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ sur $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y}\Psi_z$ construite précédemment commute avec celle de G_p et celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. L'action du centre $\mathbb{Q}_p^*$ de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ est l'inverse de celle du centre donnée par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Aussi l'espace $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y}\Psi_z$ est muni d'une action du groupe produit $\mathrm{G}_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times B_y(\mathbb{Q}_p)^*$.*

Preuve. Commençons par vérifier que les actions de G_p et de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ commutent entre elles. On vérifie cela pour l'action sur $\coprod_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y} D_{z,n}$. Soient un élément $b = \bar{b}F^r \in B_y(\mathbb{Z}_p) - \{0\}$, et un élément $\sigma \in \mathrm{G}_p$, on note $d_s = (y^{(p^s)}, G/S, \beta, \langle,\rangle, \phi, \det\phi)$

$$\begin{aligned} d_s.b.\sigma &= (y^{(p^{s+r})}, G/S, \beta\circ\bar{b}^{(p^s)}, \langle,\rangle^{N(\bar{b})}, \phi, \det\phi).\sigma \\ &= (y^{(p^{s+r})^{\sigma^{-1}}}, G^{\sigma^{-1}}/S^{\sigma^{-1}}, \beta^{\sigma^{-1}}\circ\bar{b}^{(p^s)^{\sigma^{-1}}}, \langle,\rangle^{N(\bar{b})^{\sigma^{-1}}}, \phi^{\sigma^{-1}}, \det\phi^{\sigma^{-1}}) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d_s.\sigma.b &= (y^{(p^s)^{\sigma^{-1}}}, G^{\sigma^{-1}}/S^{\sigma^{-1}}, \beta^{\sigma^{-1}}, \langle,\rangle^{\sigma^{-1}}, \phi^{\sigma^{-1}}, \det\phi^{\sigma^{-1}}).b \\ &= (y^{(p^s)^{\sigma^{-1}(p^r)}}, G^{\sigma^{-1}}/S^{\sigma^{-1}}, \beta^{\sigma^{-1}}\circ\bar{b}^{(p^s)^{\sigma^{-1}}}, \langle,\rangle^{\sigma^{-1}N(\bar{b})}, \phi^{\sigma^{-1}}, \det\phi^{\sigma^{-1}}) \\ &= d_s.b.\sigma \end{aligned}$$

On a bien des actions qui commutent au niveau des schémas. Sur les faisceaux, on utilise le fait que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E^{(p^s)} & \xrightarrow{j} & E^{(p^s)^{\sigma^{-1}}} \\ \downarrow^{F^r} & & \downarrow^{F^r} \\ E^{(p^{s+r})} & \xrightarrow{i} & E^{(p^{s+r})^{\sigma^{-1}}} \end{array}$$

oú i et j sont des isomorphismes qui proviennent du changement de base par $\mathrm{Spec}(\sigma^{-1})$.

Pour vérifier que les actions de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ commutent, on peut se limiter à vérifier la commutativité pour les éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et pour $g = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Plaçons nous d'abord sur le système inductif des $\coprod_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y}\coprod_a D_{z,n,a}$. Il est clair que l'action des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ commute à celle des éléments de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$, en effet soient $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, et $b = \bar{b}F^r \in B_y(\mathbb{Z}_p) - \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} d_s.b.h &= (y^{(p^{s+r})}, G/S, \beta\circ\bar{b}^{(p^s)}, \langle,\rangle^{N(\bar{b})}, \phi, \det\phi).h \\ d_s.b.h &= (y^{(p^{s+r})}, G/S, \beta\circ\bar{b}^{(p^s)}, \langle,\rangle^{N(\bar{b}).N(h)}, \phi\circ h, \det\phi.\det h) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_s.h.b &= (y^{(p^s)}, G/S, \beta, \langle,\rangle^{N(h)}, \phi\circ h, \det\phi\det h).b \\ d_s.h.b &= (y^{(p^{s+r})}, G/S, \beta\circ\bar{b}^{(p^s)}, \langle,\rangle^{N(h).N(\bar{b})}, \phi\circ h, \det\phi\det h) \\ d_s.h.b &= d_s.b.h \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'élément $g = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on rappelle que son action est donnée sur un élément de $D_{y,n,a}$, $n > 1$, par :

$$(y, G/S, \beta, \langle , \rangle, \phi, \det \phi).g = (y^{(p)}, G'/S, \beta', \langle , \rangle', \phi', \det \phi')$$

avec $G' = G/\langle p^{n-1}\phi((1,0))\rangle$; si π est l'isogénie quotient $G \to G'$, on a $\beta' \circ F = \pi \circ \beta$ et $\phi'((1,0)) = \pi(\phi((1,0))$, $\phi'((0,1)) = \pi(\phi((0,1))$. Cela dit, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} d_s.b.g &= (y^{(p^{s+r})}, G/S, \beta \circ \bar{b}^{(p^s)}, \langle , \rangle^{N(\bar{b})}, \phi, \det \phi).g \\ d_s.b.g &= (y^{(p^{s+r+1})}, G'/S, (\beta \circ \bar{b}^{(p^s)})', (\langle , \rangle^{N(\bar{b})})', \phi', \det \phi') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_s.g.b &= (y^{(p^{s+1})}, G'/S, \beta', \langle , \rangle', \phi', \det \phi').b \\ d_s.g.b &= (y^{(p^{s+1+r})}, G'/S, \beta' \circ \bar{b}^{(p^{s+1})}, \langle , \rangle'^{N(\bar{b})}, \phi', \det \phi') \end{aligned}$$

Il faut juste voir que $\beta' \circ \bar{b}^{(p^s+1)} = (\beta \circ \bar{b}^{(p^s)})'$. Or, on a :

$$\beta' \circ \bar{b}^{(p^s+1)} \circ F = \beta' \circ F \circ \bar{b}^{(p^s)} = \pi \circ \beta \circ \bar{b}^{(p^s)} = (\beta \circ \bar{b}^{(p^s)})' \circ F.$$

Aussi les actions de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ commutent au niveau des schémas, puis sur les faisceaux. □

Proposition 5.8. *La représentation de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ sur $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y}\Psi_{z,n}$ construite précédemment est continue.*

Preuve. Cela vient du fait que la représentation de $B_y(\mathbb{Z}_p)^*$ sur $\Psi_{y,n}$ se factorise par le groupe quotient $B_y(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$ pour un entier m suffisamment grand dépendant de l'entier n. Le résultat de Brylinski [Ca1, p.462] nous permet d'affirmer qu'il existe un entier m_0 tel que si σ est un élément du groupe $\mathrm{Aut}_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}(\widehat{O}_{\mathcal{M}(\Gamma_1(N),\Gamma(p^n))_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)},y})$ induisant l'identité sur un voisinage infinitésimal d'ordre m_0 de y alors l'automorphisme induit sur $\Psi_{y,n}$ est l'identité. D'autre part, des résultats de Drinfeld (voir [Ka2, Exp.V.1] par exemple), nous permet d'affirmer que le sous groupe K_{p^m} de $\mathrm{Aut}(E[p^\infty])$ des éléments congrus à 1 module p^m agit trivialement sur les déformations de $E[p^\infty]$ sur $W(\overline{\mathbb{F}}_p)/p^{m+1}W(\overline{\mathbb{F}}_p)$. En conséquence pour $m \geq m_0 - 1$, l'action du sous groupe K_{p^m} de $B_y(\mathbb{Z}_p)^*$ sur $\Psi_{y,n}$ est triviale. □

Remarque 5.9. *Dans la situation de la Proposition 5.7, on peut remarquer que la représentation de $\mathrm{G}_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ est induit de sa restriction au stabilisateur du point y, et même du stabilisateur d'un $D_{y,\infty,1}$ (où l'on tient donc compte du déterminant des bases de Drinfeld). Chacun des trois groupes a un morphisme canonique vers $\mathbb{Q}_p^*/p^{r\mathbb{Z}}$, avec $r = \|\hat{\mathbb{Z}}y\|$. Le stabilisateur en question est alors le sous-groupe des triplets (x, y, z) tels que le produit de leurs images dans $\mathbb{Q}_p^*/p^{r\mathbb{Z}}$ vaut 1.*

5.10 Opérateurs de Hecke et cycles évanescents

Le résultat suivant nous sera utile.

Proposition 5.11. *Soient N un entier, p et q deux nombres premiers distincts ne divisant pas N. On considère x et x' deux courbes elliptiques supersingulières munies d'une $\Gamma_1(N)$ structure sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Alors il existe une isogénie de degré une puissance de q entre x et x'.*

Preuve. On peut supposer que $N \geq 4$. Considérons le graphe orienté $\mathcal{G}$ dont les sommets x_i sont les courbes supersingulières munies d'une $\Gamma_1(N)$-structure sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à isomorphismes près et les arêtes, les isogénies de degré q à isomorphisme près. On veut montrer que ce graphe est connexe. On note T_q l'opérateur de Hecke qui compte les isogénies de degré q entre les sommets de $\mathcal{G}$: $T_q x = \sum_\phi b(\phi)$ où la somme est prise sur les isogénies ϕ de degré q de source x, et où $b(\phi)$ est le but de ϕ. On peut alors se représenter l'action de T_q par la matrice $(a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ est le nombre de q-isogénies de x_i vers x_j. Comme à i fixé on a $\sum_j a_{i,j} = q+1$, $q+1$ est valeur propre de T_q. On remarque alors que $q+1$ valeur propre simple de T_q implique que le graphe $\mathcal{G}$ est connexe. Montrons donc que $q+1$ est valeur propre simple de l'opérateur T_q.

Considérons la courbe modulaire $C = \overline{\mathcal{M}}(\Gamma_0(p), \Gamma_1(N))$ sur $\mathbb{Z}$. On note J sa jacobienne sur $\mathbb{Z}$. Sa réduction modulo p consiste en deux copies de $X_1(N)_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ s'intersectant à chaque point supersingulier (cf. [KaMa], [DeRa]). On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow J_{\overline{\mathbb{F}}_p} \longrightarrow J_1(N)_{\overline{\mathbb{F}}_p} \oplus J_1(N)_{\overline{\mathbb{F}}_p} \longrightarrow 0$$

où T est le quotient du tore $T' = \bigoplus_{\mathrm{ss}} \mathbb{G}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ par $\mathbb{G}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ où la somme s'effectue sur l'ensemble des points supersinguliers de $X_1(N)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et où l'on envoie $\mathbb{G}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ dans T' par le morphisme diagonal $\Delta : x \mapsto (x, \cdots, x)$. En utilisant, la bonne réduction de C en q, les modules de Tate de $J_{\mathbb{Q}}$ et de $J_{\mathbb{F}_q}$ sont isomorphes. La formule de congruence $T_q \equiv \mathrm{Frob} + \langle q \rangle \mathrm{Ver}$ dans $\mathrm{End}(J_1(N)_{\overline{\mathbb{F}}_p})$, et la borne de Weil sur les valeurs propres du frobenius nous assure que les valeurs propres de l'opérateur de Hecke $T_q \in \mathrm{End}(J)$ sont, en module, au plus $2\sqrt{q}$. Elles sont donc distinctes de $q+1$. Par semi-stabilité de la courbe C, on a un morphisme injectif de $\mathrm{End}(J_{\mathbb{Q}})$ dans $\mathrm{End}(J_{\mathbb{F}_p})$. On obtient alors que l'opérateur de Hecke $T_q \in \mathrm{End}(J_{\overline{\mathbb{F}}_p})$ ne peut admettre $q+1$ comme valeur propre. Finalement, $q+1$ est valeur propre simple de T_q agissant sur T'. Or cette action est donnée par la même matrice que celle donnant l'action de T_q sur le graphe $\mathcal{G}$. On obtient ainsi le résultat. □

Remarque 5.12. *On peut démontrer ce résultat également à l'aide du théorème d'approximation forte. Si on se contente d'avoir des isogénies de* *degré premier à p (ou à un nombre fini de nombres premiers donnés) ce résultat se démontre probablement d'une façon beaucoup plus élémentaire.*

Notons S l'ensemble $X_1(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{ss}}$, et $\overline{S} := \hat{\mathbb{Z}}\backslash S$ son quotient pour l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. Pour s dans $\overline{S}$, notons $\Psi_s = \oplus_{y\in s}\Psi_y$. On a alors :

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}} = \oplus_{s\in\overline{S}}\Psi_s.$$

Fixons un élément x_0 dans S, classe d'un couple (E_0, P_0), avec E_0 définie sur $\mathbb{F}_p$ (en effet, cela existe). On note $B(\mathbb{Q})$ pour $B_{x_0}(\mathbb{Q})$, et $B(\mathbb{Q}_p)$ pour $B_{x_0}(\mathbb{Q}_p)$. Pour $n \geq 1$, notons H_n le sous-groupe des triplets (q, g, σ) dans $B(\mathbb{Q}_p)^* \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ tel que la somme de leurs images dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vaut zéro, et posons :

$$U_n := \mathrm{Ind}_{H_n}^{B(\mathbb{Q}_p)^*\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times\mathrm{G}_p}\Psi_{x_0}.$$

Comme représentation de $B(\mathbb{Q}_p)^*$, on a :

$$U_n = \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)^*_n}^{B(\mathbb{Q}_p^*)}\Psi_{x_0},$$

où $B(\mathbb{Q}_p)^*_n$ est le sous-groupe de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ engendré par $B(\mathbb{Z}_p)^*$ et p^n.

Pour tout z dans $\overline{S}$, choisissons un x_z dans z, et, via la Proposition 5.11, une isogénie λ_z de degré premier à pN, entre x_0 et x_z (c'est à dire, si (E, P) représente x_z, une isogénie de E_0 vers E, envoyant P_0 à P). Cette isogénie induit des isomorphismes entre $E_0[p^\infty]$ et $E[p^\infty]$, entre $B_{x_z}(\mathbb{Q}_p)^*$ et $B(\mathbb{Q}_p)^*$, entre $B_{x_z}(\mathbb{Z}_p)^*$ et $B(\mathbb{Z}_p)^*$. Pour z dans $\overline{S}$, notons $n(z)$ le cardinal de z. Alors chaque λ_z induit un isomorphisme λ_z^* entre Ψ_z et $U_{n(z)}$, qui traduit l'action de $B_{x_z}(\mathbb{Q}_p)^* \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ sur le premier en l'action de $B(\mathbb{Q}_p)^* \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p$ sur le second. L'ensemble des λ_z nous donne un isomorphisme :

$$\oplus_{z\in\overline{S}}U_{n(z)} \xrightarrow{\sim} \oplus_{z\in\overline{S}}\Psi_z = \mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}.$$

Le but est maintenant de décrire l'action des opérateurs de Hecke via cette identification entre l'espace des cycles évanescents $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ et $\oplus_{z\in\overline{S}}U_{n(z)}$. Commençons par quelques remarques sur les U_n, en tant que représentations de $B(\mathbb{Q}_p)^*$. Tout d'abord, pour x dans S on a :

$$\Psi_x = \mathcal{F}_{k,x}\otimes V_x = \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{H}^1(E_x, \mathbb{Q}_l))\otimes V_x,$$

où V_x est la limite inductive des $\mathrm{H}^1(\tilde{X}^x_{n,\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l)$, c'est à dire, le groupe des cycles évanescants avec coefficients $\mathbb{Q}_l$. L'action de $B(\mathbb{Q}_p)^*_n = B(\mathbb{Z}_p)^* \times p^{n\mathbb{Z}}$ sur $\Psi_{x_0} = \mathcal{F}_{k,x_0}\otimes V_{x_0}$ se fait via l'action de $B(\mathbb{Z}_p)^*$ sur V_{x_0} et l'action de $p^{\mathbb{Z}}$ sur $\mathcal{F}_{k,x_0}$ où p agit par p^{k-2}.

Supposons que n et m sont des entiers positifs, avec m un multiple de n. On a alors :

$$U_m = \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)^*_m}^{B(\mathbb{Q}_p)^*} \Psi_{x_0} = \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)^*_n}^{B(\mathbb{Q}_p)^*} \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)^*_m}^{B(\mathbb{Q}_p)^*_n} \Psi_{x_0}$$

On vérifie :

$$\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)^*_m}^{B(\mathbb{Q}_p)^*_n} \Psi_{x_0} = \mathcal{F}_{k,x_0} \otimes V_{x_0} \otimes \mathbb{Q}_l[n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}],$$

où $B(\mathbb{Q}_p)^*_n = B(\mathbb{Z}_p)^* \times p^{n\mathbb{Z}}$ opère via $B(\mathbb{Z}_p)^*$ sur V_{x_0} et via $p^{n\mathbb{Z}}$ sur les deux autres facteurs. Il en résulte que U_n est canoniquement un facteur directe de U_m. En fait, U_n est le sous-espace de U_m sur lequel p^n dans $B(\mathbb{Q}_p)^*$ opère comme multiplication par $p^{n(k-2)}$. Notons U_0 la limite inductive de tous les U_n $(n \geq 1)$.

Proposition 5.13. *Soit q un nombre premier différent de p. L'action de l'opérateur de Hecke T_q sur $\oplus_{z \in \overline{S}} U_{n(z)}$ est décrite par une matrice dont les coefficients sont donnés par des éléments de $\mathbb{Q}_l[B(\mathbb{Q}_p)^*]$ (et même de $\mathbb{Q}_l[B(\mathbb{Q})^*]$)) entièrement déterminés par le choix des λ_z et la correspondance T_q sur S.*

Preuve. Notons S_q l'ensemble $X_1(N;q)(\overline{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{s.s}}$ des courbes elliptiques supersingulières munies d'un point d'ordre N et d'un sous-groupe d'ordre q. La correspondance T_q sur $\oplus_{z \in \overline{S}} U_{n(z)}$ est donnée par des correspondances indexées par $\overline{S_q} = \hat{\mathbb{Z}} \backslash S_q$. Soit λ une isogénie de degré q entre des éléments x et y de S. Décrivons alors la contribution de l'élément $\overline{\lambda}$ de $\overline{S_q}$. Prenons s et t tels que $x = x_{\overline{x}}^{(p^s)}$ et $y = x_{\overline{y}}^{(p^t)}$. La contribution de $\overline{\lambda}$ à T_q est donnée par :

$$\Psi_{\overline{y}} \xrightarrow{\lambda^*} \Psi_{\overline{\lambda}} \longrightarrow \Psi_{\overline{x}}.$$

Ce qui devient par l'identification de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ à $\oplus_{z \in \overline{S}} U_{n(z)}$:

$$U_{n(\overline{y})} \longrightarrow U_{n(\overline{\lambda})} \overset{\lambda_{\overline{y}}^{-1} F^{-t} \lambda F^s \lambda_{\overline{x}}}{\longrightarrow} U_{n(\overline{\lambda})} \longrightarrow U_{n(\overline{x})}. \ \square$$

Pour utiliser le principe de multiplicité 1, on définit H_{e} comme l'image de H^1 dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$. Notons que $\mathrm{H}_{\mathrm{e}} = \mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ si $k > 2$.

Corollaire 5.14. *Décomposons l'espace U_0 sous la forme de produit de représentations irréductibles $\pi \otimes \rho \otimes \pi'$ pour l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{G}_p \times B(\mathbb{Q}_p)^*$. Alors pour toute représentation irréductible π' de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ il y a au plus un triplet de la forme $\pi \otimes \rho \otimes \pi'$ qui intervient dans H_{e}. Donc dans les triplets $\pi \otimes \rho \otimes \pi'$ intervenant dans H_{e}, π' détermine π et ρ.*

Preuve. Soit π' une représentation de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ intervenant dans H_{e}. Supposons que l'on ait deux triplets distints $\pi_1 \otimes \rho_1 \otimes \pi'$ et $\pi_2 \otimes \rho_2 \otimes \pi'$ intervenant dans H_{e}. La proposition précédente implique alors que les deux sous-espaces $\pi_1 \otimes \rho_1 \otimes \pi'$ et $\pi_2 \otimes \rho_2 \otimes \pi'$ ont les mêmes systèmes de valeurs propres pour les opérateurs de Hecke T_q avec $q \neq p$. Soit a un tel système de valeurs propres. Le principe de multiplicité un dit que le sous-espace propre H^1_a correspondant de H^1 est égal à $\pi_{f,p} \otimes \rho^\vee_{f,p}$, où f est l'unique nouvelle forme donnant lieu à a. On en conclut que $\pi_1 = \pi_{f,p} = \pi_2$, que $\pi^\vee_{f,p} \otimes \rho_{f,p} \cap \mathrm{H}^1_s = 0$, et que $\rho^\vee_{f,p} = \rho_1 \oplus \rho_2$. Mais ceci contredit le Corollaire 3.17 qui affirme que l'image $\rho^\vee_{f,p}$ dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ est irréductible. □

Corollaire 5.15. *Soit a un système de valeurs propres dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ pour les opérateurs de Hecke T_q avec $q \neq p$ premier opérant sur H_{e}. Soit f la nouvelle forme correspondante. Alors il y a une unique représentation irréductible π' de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ qui donne lieu, via la Proposition 5.13, au système de valeurs propres a.*

Preuve. Il y a au moins une telle π' car a est un système de valeurs propres des T_q. Le fait que $\mathrm{H}^1_a = \pi_{f,p} \otimes \rho^\vee_{f,p}$ est d'image irréductible dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ fait qu'il ne peut pas y en avoir plus. □

Remarque 5.16. *Si on sait montrer que l'application $\pi' \mapsto \pi$ est injective, alors cela implique ce que l'on cherche à démontrer, à savoir que la représentation $\pi_{f,p}$ détermine la représentation $\rho_{f,p}$ (pour les $\pi_{f,p}$ intervenant dans l'espace des cycles évanescents). Pour montrer cette injectivité, on va utiliser la notion de forme automorphe sur l'algèbre de quaternions B, et quelques résultats sur les correspondances locale et globale de Jacquet-Langlands entre formes automorphes pour $B(\mathbb{Q})^*$ et pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.*

6 Formes automorphes sur les quaternions

L'objectif de ce chapitre est de démontrer l'injectivité de la correspondance établie au chapitre précédent entre représentations admissibles irréductibles de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. L'idée est de montrer que les matrices B_l donnant l'action des opérateurs de Hecke construites précédemment, sont aussi celles donnant l'action d'opérateurs de Hecke sur un espace H_B^0 de formes automorphes sur les quaternions. A cet effet, dans une première partie, on rappelle les liens existants entre des quotients des idèles $B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*$ et des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières (5.1). On définit alors l'espace H_B^0 et l'action d'algèbres de quaternions sur cet espace (5.2). On réalise alors, via le choix d'isogénies, l'action des opérateurs de Hecke sous forme matricielle (5.3). Enfin, en utilisant les résultats de Jacquet-Langlands, on montre l'injectivité de la correspondance (5.4).

6.1 Courbes elliptiques supersingulières et quotients d'idèles

On choisit E_0 une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On pose $B(\mathbb{Z}) := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(E_0)$, c'est un ordre maximal de $B = B(\mathbb{Q})$ une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ ramifiée exactement en p premier et en ∞. On a donc $B(\mathbb{Z}_p) := B(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p = \mathrm{End}(E[p^\infty])$ est l'ordre maximal d'un corps de quaternions $B(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{Q}_p$, et $B(\mathbb{Z}_l) \simeq M_2(\mathbb{Z}_l)$ pour l premier différent de p. On note $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles sur $\mathbb{Q}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{f}}$ les adèles finies sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbf{A}^p$ les adèles sur $\mathbb{Q}$ sans éléments à la place p première. On note $B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^* = (B \otimes \mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*$ les idèles sur B. Si $N = \prod_{l \in \mathcal{N}} l^{n_l}$ est la décomposition de N en facteurs premiers, on note pour $l \in \mathcal{N}$, K_{n_l} le sous-groupe compact des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_l)$ congrus à l'identité modulo l^{n_l}, et K_{1,n_l} le sous-groupe compact des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_l)$ congrus $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ modulo l^{n_l}. On définit alors les sous-groupes compacts de $B(\mathbf{A}_f)^*$ suivants :

$$K_N = B(\mathbb{Z}_p)^* \prod_{l \text{ premier},\, l \notin \mathcal{N}} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_l) \prod_{l \in \mathcal{N}} K_{n_l}$$

et

$$K_{1,N} = B(\mathbb{Z}_p)^* \prod_{l \text{ premier},\, l \notin \mathcal{N}} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_l) \prod_{l \in \mathcal{N}} K_{1,n_l}$$

Enfin on note $K_{p,n}$ le noyau du morphisme naturel de $B(\mathbb{Z}_p)^* = \mathrm{Aut}(E[p^\infty])$ dans $B(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \hookrightarrow \mathrm{Aut}(E[p^n])$. On a le résultat classique suivant :

Proposition 6.2. *Soit p un nombre premier. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'ensemble $B(\mathbb{Q})^*\backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K_1$.*

Preuve. Il existe une bijection bien connue entre les classes de modules à droite projectifs de rang 1 sur $B(\mathbb{Z})$ noté $\mathcal{C}(B(\mathbb{Z}))$ et les classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Soit M un tel module. $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes \mathbb{Q}$ est libre de rang 1 sur $B(\mathbb{Q})$. Le choix d'une base de $M_{\mathbb{Q}}$ donne un isomorphisme $f : B(\mathbb{Q}) \simeq M_{\mathbb{Q}}$. Posons $I = f^{-1}(M)$, c'est un idéal à droite de $B(\mathbb{Z})$. Considérons alors des générateurs locaux de l'idéal $I : I \otimes \mathbb{Z}_q = g_q.B(\mathbb{Z}_q)$. Pour presque que tous q, on a $g_q \in B(\mathbb{Z}_q)^*$ car $B(\mathbb{Z})/I$ est fini. On obtient ainsi une idèle $g \in B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*$. Un autre choix pour f, donnerait une idèle g' vérifiant $g' = b.g.k$ avec $k \in K_1$ et $b \in B(\mathbb{Q})^*$. On obtient ainsi une flèche de $\mathcal{C}(B(\mathbb{Z}))$ dans $B(\mathbb{Q})^*\backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K_1$. Dans l'autre sens à une idèle $g \in B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*$, on associe le $B(\mathbb{Z})$-module $M = \prod_q g.B(\mathbb{Z}_q) \cap B(\mathbb{Q})$ qui ne dépend que de la classe de g dans $B(\mathbb{Q})^*\backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K_1$.

D'autre part, il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'ensemble $\mathcal{C}(B(\mathbb{Z}))$ (voir par exemple [Gr1, part.2]). A une classe d'isomorphismes E, on associe le $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(E_0) = B(\mathbb{Z})$-module à droite $M_E = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(E_0, E)$. Ce module est non nul (cf 5.11) libre de rang 4 sur $\mathbb{Z}$: c'est un $\mathbb{Z}$-module libre qui est un $\mathrm{End}(E_0)$-module aussi son rang est au moins 4 ; le choix d'une isogénie de E_0 dans E permet d'injecter M_E dans $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(E_0)$. Reste à voir qu'il est localement libre de rang 1 sur $B(\mathbb{Z})$. Pour cela il suffit de montrer que pour tout q premier $M_E \otimes \mathbb{F}_q$ est engendré par un élément sur $B(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_q$. En $q \neq p$ cela résulte de la simplicité de $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}_q)$. En p, on a $B(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{F}_{p^2}[\epsilon]$ avec les relations $\epsilon^2 = 0$ et $\epsilon.x = x^p.\epsilon$. Le module $M_E \otimes \mathbb{F}_p$ est fidèle sur $\mathbb{F}_{p^2}[\epsilon]$ (sinon le frobenius se factoriserait par la multiplication par p), et le choix d'un x dans $M_E \otimes \mathbb{F}_p$ vérifiant $\epsilon.x \neq x$ nous donne une base sur $\mathbb{F}_{p^2}$, et donc un générateur sur $\mathbb{F}_{p^2}[\epsilon]$. Dans l'autre sens, à M module à droite projectif de rang 1 sur $B(\mathbb{Z})$, on associe la courbe elliptique $M \otimes_{B(\mathbb{Z})} E_0$ définie comme suit : c'est le foncteur des schémas sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dans les groupes abéliens valant en S, $M \otimes_{B(\mathbb{Z})} E_0(S)$. On peut écrire le module M étant projectif $B(\mathbb{Z})^n \simeq M \oplus L$. L'idempotent $i_L.pr_L$ associant à (m, l) l'élément $(0, l)$, définit un morphisme $e : (E_0)^n \to (E_0)^n$ dont le noyau représente le foncteur $M \otimes_{B(\mathbb{Z})} E_0(.)$. Ce noyau est un schéma abélien sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et l'on peut construire facilement des morphismes non nuls de $E = M \otimes_{B(\mathbb{Z})} E_0$ dans E_0, et dans l'autre sens de E_0 dans $E = M \otimes_{B(\mathbb{Z})} E_0$, ce qui montre que E est de genre 1. Il reste à voir que $M \simeq \mathrm{Hom}(E_0, M \otimes E_0)$. On a une flèche naturelle de M dans $\mathrm{Hom}(E_0, M \otimes E_0)$: on associe à m l'élément $x \to m \otimes x$. Posons $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, B(\mathbb{Z}))$. On obtient une flèche de $M^\vee$ dans $\mathrm{Hom}(M \otimes E_0, E_0)$

en associant à n l'élément $m \otimes e \to n(m).e$. Considérons le morphisme naturel de $M \otimes M^\vee$ dans $B(\mathbb{Z})$ associant à $m \otimes n$ l'élément $n(m)$. Ce morphisme est surjectif (projectivité de M), donc bijectif. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes M^\vee & \to & \mathrm{Hom}(E_0, E_0 \otimes M) \otimes \mathrm{Hom}(M \otimes E_0, E_0) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B(\mathbb{Z}) = \mathrm{End}(E_0) \end{array}$$

Aussi le morphisme de $M \otimes M^\vee$ dans $\mathrm{Hom}(E_0, E_0 \otimes M) \otimes \mathrm{Hom}(M \otimes E_0, E_0)$ est bijectif, ce qui donne le résultat. □

Corollaire 6.3. *Soient p un nombre premier et E_0 une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'idèles $B(\mathbb{Q})^* \backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières E sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ munies d'un isomorphisme de $E^{\mathrm{tors.}}$ dans $E^{\mathrm{tors.}}$. Il existe aussi une correspondance bijective entre $B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières E sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ munies d'un isomorphisme de $E^{\mathrm{tors.}}$ dans $E^{\mathrm{tors.}}$ et d'une quasi-isogénie $\lambda \in \mathrm{Hom}(E_0, E) \otimes \mathbb{Q}$.*

Preuve. On rappelle que l'on a pour tout q premier $\mathrm{End}(E_0[q^\infty]) \simeq B(\mathbb{Z}_q)$. A $g \in B(\mathbb{Q})^* \backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*$, on associe la courbe elliptique définie par la correspondance précédente, i.e, $E = M_{\overline{g}} \otimes_{B(\mathbb{Z})} E_0$. On remarque alors que :

$$E[q^\infty] = (M_{\overline{g}} \otimes_{B(\mathbb{Z})} E_0)[q^\infty] = M_{\overline{g},q} \otimes_{B(\mathbb{Z}_q)} E_0[q^\infty]$$

On a $M_{\overline{g},q} \simeq \mathrm{Hom}(E_0[q^\infty], E[q^\infty])$ comme $B(\mathbb{Z}_q)$-module à droite. La donnée de $\overline{g}_q$, revient alors à celle d' un isomorphisme entre $E_0[q^\infty]$ et $E[q^\infty]$ $(x \mapsto g_q \otimes x)$. Aussi se donner $\overline{g}$ revient à se donner un isomorphisme de $E^{\mathrm{tors.}}$ dans $E^{\mathrm{tors.}}$. □

Corollaire 6.4. *Soient p un nombre premier, n un entier, N un entier non divisible par p. Soit E_0 une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble $\mathcal{S}_{p^n,N}$ des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ munies d'un isomorphisme entre $E_0[p^\infty]$ et $E[p^\infty]$ modulo $K_{p,n}$ et d'un point d'ordre N et l'ensemble des classes d'idèles $\mathcal{S}'_{p^n,N} := B(\mathbb{Q})^* \backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^* / K_{p,n} K_{1,N}$.

Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble $\mathcal{S}_{p^\infty,N}$ des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ munies d'un isomorphisme entre $E_0[p^\infty]$ et $E[p^\infty]$ et d'un point d'ordre N et l'ensemble des classes d'idèles $\mathcal{S}'_{p^\infty,N} := B(\mathbb{Q})^* \backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^* / K^p_{1,N}$.

Preuve. On peut supposer $N = q^m$ avec q nombre premier distinct de p. Soit une classe d'idèle $B(\mathbb{Q})^*.g.K_{p,n}K_N$,.On pose $E = M_g \otimes E_0$. Remarquons que $\mathrm{Isom}(E_0[q^\infty], E[q^\infty])$ modulo K_{q^m} s'identifie à $\mathrm{Isom}(E_0[q^m], E[q^m])$. En utilisant la bijection de la proposition précédente, la donnée de la classe de g_q revient donc à la donnée d'un isomorphisme entre $E_0[q^m]$ et $E[q^m]$ et celle de la classe de g_p à un isomorphisme de $E_0[p^\infty]$ dans $E[p^\infty]$ modulo $K_{p,n}$. Aussi, si on se fixe ϕ_0 une $\Gamma(q^n)$-structure sur E_0, on a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ munies d'une $\Gamma(q^m)$-structure et d'un isomorphisme entre $E_0[p^\infty]$ et $E[p^\infty]$ modulo $K_{p,n}$, et l'ensemble $B(\mathbb{Q})^* \backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K_{p,n}K_{q^m}$. Cette bijection est équivariante pour l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q^m\mathbb{Z})$ s'identifiant au groupe $\mathrm{Aut}(E_0[q^m])$. En quotientant par K_{1,q^m}, on obtient une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ munies d'une $\Gamma_1(q^m)$-structure et un isomorphisme $E_0[p^\infty]$ et $E[p^\infty]$ modulo $K_{p,n}$ et l'ensemble $B(\mathbb{Q})^* \backslash B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K_{p,n}K_{1,q^m}$. □

On dispose pour tout entier $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sur l'espace $\mathcal{S}_{p^n,N}$ du faisceau $\mathcal{F}$ défini en $x = (E, P, \alpha_p)$ par $\mathcal{F}_x = \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathrm{H}^1(E, \overline{\mathbb{Q}}_l))$. Via les correspondances précédentes, sa donnée sur $\mathcal{S}'_{p^n,N}$, revient à celle du faisceau constant de fibre $\mathcal{F}_0 = \mathrm{Sym}^{k-2}(H^1(E_0, \overline{\mathbb{Q}}_l))$ sur $B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K^p_{1,N}K_{p,n}$ et de l'action naturelle π_0 de $B(\mathbb{Q})^*$ sur F_0. On pose $M'_n = \mathrm{H}^0(\mathcal{S}'_{p^n,N}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{S}_{p^n,N}, \mathcal{F})$. En fait M'_n s'identifie à l'ensemble des fonctions f de $B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K^p_{1,N}K_{p,n}$ dans $\mathcal{F}_0$ vérifiant $f(\gamma.x) = \pi_0(\gamma)f(x)$ cela pour tout $\gamma \in B(\mathbb{Q})^*$ et $x \in B(\mathbf{A}^{\mathrm{f}})^*/K^p_{1,N}K_{p,n}$. L'ensemble $\mathrm{H}^0_B := \varinjlim_n M'_n$ s'identifie aux éléments de M'_∞ de stabilisateur ouvert dans $B(\mathbb{Z}_p)^*$. On dispose sur M'_n de l'action de l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}'$ provenant des classes d'idèles. On rappelle que $\mathbf{T}'$ est la $\mathbb{Z}$-algèbre engendrée par les doubles classes $B(\mathbb{Z}_q)^* \backslash B_q^*/B(\mathbb{Z}_q)^*$ pour tout q premier ne divisant pas N, $K^1_{q^{n_q}} \backslash B_q^*/K^1_{q^{n_q}}$ pour q divisant N. Cette algèbre est engendrée par les opérateurs de Hecke T'_q valant :

- pour q ne divisant pas Np :

$$T'_q = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q).(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}).\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q) = \coprod_g g\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q)$$

où $g \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_q) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_q)$ modulo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q)$ et $\det(g) = q$,

- pour q divisant N :

$$T'_q = K^1_{q^{n_q}}.(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}).K^1_{q^{n_q}} = \coprod_g gK^1_{q^{n_q}}$$

où $g \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_q) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_q)$ modulo $K^1_{q^{n_q}}$ et $\det(g) = q$,

- valant pour $q = p$:

$$T'_p = B(\mathbb{Z}_p)^*.\pi.B(\mathbb{Z}_p)^* = \pi.B(\mathbb{Z}_p)^* = B(\mathbb{Z}_p)^*.\pi$$

avec π générateur de l'idéal bilatère maximal de $B(\mathbb{Z}_p)$.

Proposition 6.5. *Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et q un nombre premier distinct de p. La bijection Θ_n entre les ensembles M'_n et M_n est compatible avec les actions des opérateurs de Hecke T_q et T'_q.*

Preuve. Soit $f \in M_n$, on veut montrer que $T'_q(\Theta_n f) = \Theta(T_q f)$. Pour tout $x_i = (E, P, \alpha_p) \in \mathcal{S}_{p^n,N}$, on choisit un g_i dans $B(\mathbf{A}^f)^*/K_{1,N}$ tel que $\Theta(x_i) = \bar{g}_i$. D'autre part, si $f' \in M'_n$, on a $\Theta^{-1} f'(x) = (\lambda^{-1})^* f'(x, \lambda)$ où λ est une quasi-isogénie de E_0 dans E. On a aussi $(\Theta(f))(x, \lambda) = \lambda^* f(x)$. Calculons $T'_q(f')$. Supposons que q ne divise pas N. On écrit l'opérateur de Hecke $T'_q = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q).(\begin{smallmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}).\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q) = \coprod_l h_l \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_q)$. On a $(T'_q f')(g_i) = \sum_l f'(g_i.h_l)$. Si on écrit $g_i.h_l = \gamma.g_j.k$, et si on pose $n_j = \mathrm{card}\{\gamma \in B(\mathbb{Q})^*$ tels que $\gamma g_j = g_i h_l$ modulo $K\}$, on a alors :

$$T'_q(f')(g_i) = \sum_j \sum_\gamma (n_j)^{-1} \pi_0(\gamma).f(g_j)$$

où γ parcourt l'ensemble $B(\mathbb{Q})^* \cap \{g_i.K.(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}).K.g_j^{-1}\}$.

Aussi :

$$\Theta^{-1}(T'_q)(\Theta f)(x_i) = (\lambda_i^{-1})^* \sum_j \sum_\gamma (n_j)^{-1} \pi_0(\gamma) \Theta(f)(g_j)$$

i.e,

$$\Theta^{-1}(T'_q)(\Theta f)(x_i) = \sum_j \sum_\gamma (n_j)^{-1} (\lambda_i^{-1})^* \pi_0(\gamma) \lambda_j^* f(x_j)$$

mais cette dernière somme se réécrit $\sum_\phi (n_\phi)^{-1} \phi^* f(x_\phi)$, où ϕ parcourt l'ensemble des isogénie de degré q de source x_i, et si $\phi : E_i \to E'$, on a noté $n_\phi = \mathrm{card(Aut)(E')}$, et $x_\phi = (E', \phi P, \phi\alpha)$. On a bien le résultat car $T_q f(x_i) = \sum_H \pi_H^* f(E_i/H, \pi_H P, \pi_H \alpha_p)$ la somme s'effectuant sur les sous groupes d'ordre q de E_i ne rencontrant pas P ; π_H est l'isogénie quotient.

Si q divise N, la démonstration s'adapte bien car dans ce cas l'ensemble $B(\mathbb{Q})^* \cap \{g_i.K.(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}).K.g_j^{-1}\}$ s'interprète comme l'ensemble des isogénies de la courbe elliptique $E_i = M_{g_i} \otimes E_0$ dans la courbe elliptique $E_j = M_{g_j} \otimes E_0$ de degré q respectant les $\Gamma_1(N)$-structures de niveau . □

6.6 Action des algèbres de quaternions sur l'espace H^0_B

De l'égalité $M_\infty = \mathrm{H}^0(\mathcal{S}_{p^\infty,N}, \mathcal{F})$. On a :

$$\begin{aligned} M_\infty &= \oplus_{y=(E,P)\in\mathcal{S}_N} \mathrm{H}^0(\mathrm{Isom}(E_0[p^\infty], E[p^\infty]), \mathcal{F}) \\ M_\infty &= \oplus_{y=(E,P)\in\mathcal{S}_N} \mathcal{F}_y \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{Isom}(E_0[p^\infty], E[p^\infty]), \overline{\mathbb{Q}}_l) \end{aligned}$$

Maintenant, si on note $\overline{\mathbb{Q}}_l[\mathrm{Isom}(E_0[p^\infty], E[p^\infty])]$ l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{Isom}(E_0[p^\infty], E[p^\infty])$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ dont le stabilisateur est ouvert dans $B(\mathbb{Z}_p)^* = \mathrm{Aut}(E_0[p^\infty])$. On en déduit que :

$$\mathrm{H}^0_B = \oplus_{y=(E,P)\in\mathcal{S}_N} \mathcal{F}_y \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l[\mathrm{Isom}(E_0[p^\infty], E[p^\infty])]$$

En posant pour $y = (E, P) \in \mathcal{S}_N$, $\mathrm{H}^0_{B,y} = \mathcal{F}_y \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l[\mathrm{Isom}(E_0[p^\infty], E[p^\infty])]$, on écrit $\mathrm{H}^0_B = \oplus_{y\in\mathcal{S}_N} \mathrm{H}^0_{B,y}$.

Chaque $\mathrm{H}^0_{B,y}$ est muni d'une action de $B_y(\mathbb{Z}_p)^* = \mathrm{Aut}(E[p^\infty])$. On peut étendre cette action en une action de $B_y(\mathbb{Q}_p)^* = \mathrm{End}(E[p^\infty]) \otimes \mathbb{Q}$ sur $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y} \mathrm{H}^0_{B,z}$: par analogie avec les calculs effectués au chapitre précédent, on pose pour $z \in \hat{\mathbb{Z}}y$, $z = (E^{(p^s)}, P^{(p^s)})$, et $b = \bar{b}.F^r \in B_y(\mathbb{Z}_p) - \{0\}$ (cf 4.2.2)

$$b.(E^{(p^s)}, P^{(p^s)}, \alpha_p) = (E^{(p^{s-r})}, P^{(p^{s-r})}, \bar{b}^{(p^{(s-r)}}\alpha_p)$$

et sur le faisceau, on utilise $F^r : E^{(p^{s-r})} \to E^{(p^s)}$. On peut vérifier que sous les conditions analogues à la proposition 4.2.2, on obtient une action de $B(\mathbb{Q}_p)^*_y$ sur $\oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y} \mathrm{H}^0_{B,z}$.

Avec les mêmes notations que dans la partie 4.3, i.e, H_y est le stabilisateur de $H^0_{B,y}$ dans $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$, on a

$$H^0_{B,\bar{y}} := \oplus_{z\in\hat{\mathbb{Z}}y} \mathrm{H}^0_{B,z} \simeq \mathrm{ind}_{H_y}^{B_y(\mathbb{Q}_p)^*} \mathrm{H}^0_{B,y}$$

6.7 Action des opérateurs de Hecke sur l'espace H^0_B

Pour calculer l'action des opérateurs de Hecke T_l sur H^0_B, on trivialise la situation. De façon analogue à 5.10, on choisit pour tout $y = (E, P) \in \mathcal{S}_N$, une isogénie λ_y de degré premier à pN, entre y_0 et y. Cette isogénie induit des isomorphismes canoniques entre $\mathrm{H}^0_{B,y}$ et $\mathrm{H}^0_{B,y}$, $B_y(\mathbb{Q}_p)$ et $B(\mathbb{Q}_p)$. Et si on note $H_{r(y)}$ l'image de H_y dans $B(\mathbb{Q}_p)^*$ par ce dernier isomorphisme, on obtient un isomorphisme entre $\mathrm{H}^0_{B,\bar{y}}$ et $V_{r(\bar{y})} := \mathrm{ind}_{H_{r(y)}}^{B(\mathbb{Q}_p)^*} \mathrm{H}^0_{B,y_0}$, compatible aux actions de $B_y(\mathbb{Q}_p)^*$ et de $B(\mathbb{Q}_p)^*$. Finalement on obtient une trivialisation de H^0_B en $\oplus_{\bar{y}} V_{r(\bar{y})}$. On appelle V_0 le sous-espace de $\mathrm{ind}_{B(\mathbb{Z}_p)^*}^{B(\mathbb{Q}_p)^*} \overline{\mathbb{Q}}_l[B(\mathbb{Z}_p)^*]$ engendré par les $V_{r(\bar{y})}$, l'action de $B(\mathbb{Z}_p)^*$ sur

$\overline{\mathbb{Q}}_l[B(\mathbb{Z}_p)^*]$ étant la représentation régulière à droite. On note ρ'_0 la représentation de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ sur V_0.

Proposition 6.8. *L'action des opérateurs de Hecke T_l, pour l nombre premier distinct de p, sur $\oplus_{\bar{y}} V_{r(\bar{y})}$ peut se représenter par une matrice B'_l entierement déterminée par la connaissance des représentations π_0 et ρ'_0.*

Preuve Fixons l nombre premier distinct de p. Et soit λ une isogénie de degré l entre y_1 et y_2. Supposons que $y_1 = y^{(p^s)}$ et $y_2 = y'^{(p^{s'})}$. Calculons la contribution de λ à l'action de T_l. Comme $y_1 = y^{(p^s)}$, H^0_{B,y_1} est la partie stable sous $F^s H_y F^{-s}$ de $\mathrm{H}^0_{B,\bar{y}}$, et est identifié à la partie stable sous $F^s H_{r(y)} F^{-s}$ de $V_{r(\bar{y})}$, i.e, $F^s \mathrm{H}^0_{B,y_0}$. La contribution de λ à l'action de T_l est donnée par :

$$\mathrm{H}^0_B \overset{pr_{y_2}}{\rightarrow} \mathrm{H}^0_{B,y_2} \overset{\lambda^*}{\rightarrow} \mathrm{H}^0_{B,y_1} \overset{i_{y_1}}{\rightarrow} \mathrm{H}^0_B$$

Ce qui devient par l'identification de H^0_B à $\oplus_{\bar{z}} V_{r(\bar{z})}$:

$$\oplus_{\bar{z}} V_{r(z)} \overset{pr_{y'^{(p^{s'})}}}{\longrightarrow} F^{s'} \mathrm{H}^0_{B,y_0} \overset{f'_\lambda}{\rightarrow} F^s \mathrm{H}^0_{B,y_0} \overset{i_{y^{(p^s)}}}{\longrightarrow} \oplus_{\bar{z}} V_{r(z)}$$

Avec f'_λ donnée par :

$$f'_\lambda = (F^s \lambda_y F^{-s})^* (\lambda)^* (F^{-s'} \lambda_{y'}^{-1} F^{s'})^* = (\lambda_{y'}^{(p^{-s'})} \lambda \lambda_y^{(p^s)})^* = \pi_0.\rho'_0(a'_\lambda)$$

où $a'_\lambda = \lambda_{y'}^{(p^{-s'})} \lambda \lambda_y^{(p^s)}$. D'où une représentation matricielle de l'action des opérateurs T_l, donnée par des matrice B'_l, matrice $s \times s$ où s est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{S}_N$. □

Remarque 6.9. *Pourvu que l'on choisissent les mêmes trivialisations, les matrices B_l donnant l'action des opérateurs de Hecke T_l, pour l premier distinct de p, sur l'espace des cycles évanescents $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$ et B'_l sur l'espace H^0_B sont étroitement liées. Plus précisément, les coefficients a_λ et a'_λ intervenant dans les calculs des matrices B_l et B'_l sont égaux. Du fait que la représentation $\rho_0^\vee$ est une sous-représentation de la représentation ρ'_0, la matrice $B_l^\vee$ est une sous-matrice de B'_l.*

6.10 Utilisation des résultats de Jacquet et de Langlands

Rappelons l'existence d'une correspondance, appelée correspondance de Jacquet-Langlands, entre les représentations irréductibles lisses de $B(\mathbf{A})^*$

et des représentations irréductibles lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$. Cette correspondance que l'on notera JL(.), est de nature locale i.e $\mathrm{JL} = \otimes_q \mathrm{JL}_q$, et est caractérisée par l'invariance du caractère central et des facteurs L et ϵ associés aux représentations. En particulier, si $\pi = \mathrm{JL}(\pi')$, les représentations π_q et π'_q sont équivalentes pour $q \neq p, \infty$, et si la représentation π'_p est de dimension 1 alors la représentation π_p est de la série spéciale, sinon elle est supercuspidale. (voir [JaLa], [DiTa, part.5])

Les résultats classiques de la théorie des formes automorphes sur les quaternions ([Ge, part.10]), i.e sur $B(\mathbf{A})$, nous permettent de décomposer l'espace H^0_B en une somme directe sur l'ensemble des représentations admissibles irréductibles de $B(\mathbf{A})$, π' non équivallentes avec π'_∞ fixé, des représentations irréductibles admissibles de $B(\mathbb{Q}_p)^*$: π'_p. Cette décomposition $\mathrm{H}^0_B = \oplus_{\pi'} \pi'_p$ est celle de H^0_B est sous-module simple pour l'action de l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}'$.

Proposition 6.11. *La correspondance obtenue au chapitre précédent* π *entre représentations* π'_p *admissibles irréductibles de* $B(\mathbb{Q}_p)^*$ *et représentations admissibles irréductibles* π_p *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *(5.14) est injective.*

Preuve. Soient ${\pi'}^1_p$ et ${\pi'}^2_p$ deux représentations irréductibles admissibles de $B(\mathbb{Q}_p)^*$ envoyées sur une même représentation π_p par la correspondance 5.14. Il existe f une nouvelle forme propre de poids k de niveau $p^n N$ telle que $\pi_{p,f} \simeq \pi_p.|\ |_p$. D'après les rappels précédents et la remarque 6.9, il existe deux représentations irréductibles lisses de $B(\mathbf{A})^*$, θ^1 et θ^2 admettant les mêmes valeurs propres, celles de f, pour les opérateurs T_l, $l \neq p$, et vérifiant $\theta^1_p \simeq ({\pi'}^1_p)^\vee$, $\theta^2_p \simeq ({\pi'}^2_p)^\vee$. On aura alors $\mathrm{JL}(\theta_1) = \mathrm{JL}(\theta_2)$ car ses deux représentations ont les mêmes valeurs propres pour presque tous les opérateurs T_l (en l où les représentations ne sont pas ramifiées, les facteurs L et ϵ ne dépendent que du caractère central et de la valeur propre de T_l). Par injectivité de la correspondance JL, les représentations θ^1 et θ^2 sont équivalentes. Aussi, les représentations θ^1_p et θ^2_p sont équivalentes. Finalement, on a montré que les représentations ${\pi'}^1_p$ et ${\pi'}^2_p$ sont équivalentes. La correspondance 5.14 est donc injective. □
On obtient ainsi le résultat désiré :

Corollaire 6.12. *Soit* f *une nouvelle forme parabolique propre de poids* k, $k \geq 2$, *de niveau* $p^n N$. *Supposons que la représentation* $\rho_{f,p}$ *ne soit pas dans la fibre spéciale, i.e.,* $\rho_{f,p} \not\subset \mathrm{H}^1_{\mathrm{s}}$, *alors* $\pi_{f,p}$ *détermine* $\rho_{f,p}$.

Remarque 6.13. *La correspondance 5.14 s'avere être le dual de la correspondance de Jacquet-Langlands. On a* $\pi(\pi'_p) = \mathrm{JL}_p({\pi'_p}^\vee)$. *En conséquence, si la forme modulaire* f *considérée est telle que la représentation* $\rho_{f,p,\mathrm{e}}$ *soit* *de dimension* 1*, alors la représentation* $\pi_{f,p}$ *est de la série spéciale car la représentation* π'_p *est alors de dimension* 1 *; si* $\rho_{f,p,\mathrm{e}}$ *est de dimension* 2 *alors la représentation* $\pi_{f,p}$ *est supercuspidale ou spéciale.*

Remarque 6.14. *Etant donné* f *une forme propre nouvelle telle que* $\rho_{f,p}$ *ne soit pas dans la fibre spéciale, on sait lui associer, à l'aide des matrices* B_l*, une représentation automorphe de* $B(\mathbf{A})^*$*. On a ainsi construit un inverse de la correspondance globale de Jacquet-Langlands.*

7 Les résultats

Théorème 7.1. *Soient p un nombre premier, N et k deux entiers, $k \geq 2$. Soit f une forme modulaire nouvelle propre pour les opérateurs de Hecke, de niveau N et de poids k. Alors la représentation admissible irréductible $\pi_{f,p}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ détermine la restriction $\rho_{f,p}$ de la représentation galoisienne associée à f au groupe de décomposition en p.*

Preuve. On appelle $\rho_{f,p,\mathrm{e}}$ l'image de $\rho^{\vee}_{f,p}$ dans l'espace des cycles évanescents $\mathrm{H}^1_{\mathrm{e}}$, $\rho_{f,p,s}$ l'intersection de $\rho^{\vee}_{f,p}$ avec la cohomologie de la fibre spéciale H^1_s, $\tilde{\rho}_{f,p,s}$ l'image de cet intersection dans la cohomologie de la normalisation de la fibre spéciale $\tilde{\mathrm{H}}^1_s$. On dispose du diagramme suivant composé de deux suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1_s \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1 \arrow[r, "u"] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{e}} \\
 & \tilde{\mathrm{H}}^1_s \arrow[d] & & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Distinguons alors trois cas :
Premier cas : $\rho_{f,p} = \rho_{f,p,s}$, autrement dit si la représentation $\rho_{f,p}$ est dans la cohomologie de la fibre spéciale. On a d'après les résultats du chapitre 3 (3.4.3, 3.5.1) et du chapitre 2 (2.4.3), $\rho_{f,p} = \tilde{\rho}_{f,p,s}$, la représentation $\pi_{f,p}$ est de la série principale, et si $\pi_{f,p} \simeq \mathrm{ind}(\alpha,\beta)$ alors $\rho_{f,p} \simeq \alpha|\;|_p^{-1} \oplus \beta$.
Deuxième cas : $\rho_{f,p} = \rho_{f,p,\mathrm{e}}$, autrement dit si la représentaton $\rho_{f,p}$ est dans l'espace des cycles évanescents. On sait d'après les résultats des chapitre 2 (2.4.3) et du chapitre 5 (5.4.2), que la représentation $\rho_{f,p}$ est irréductible, que la représentation $\pi_{f,p}$ est spéciale ou supercuspidale et détermine la représentation $\rho_{f,p}$.
Troisième cas : $\rho_{f,p,s}$ est de dimension 1, alors $\rho_{f,p,s}$ est inclus dans K, et $\rho_{f,p,\mathrm{e}}$ est aussi de dimension 1. Dans ce cas d'après les résultats des chapitre 2 (2.4.3), 3 (3.5.1) et 5 (5.4.2), la représentation $\rho_{f,p}$ est réductible indécomposable, la représentation $\pi_{f,p}$ est de la série spéciale ; si $\pi_{f,p} \simeq \mathrm{Sp}\alpha$, alors $\rho_{f,p} \simeq \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha|\;|_p^{-1} \end{pmatrix}$.
$\square$

On peut préciser la relation liant les représentations $\pi_{f,p}$ et $\rho_{f,p}$ en terme des classifications données au premier chapitre. Rappelons qu' il existe un procédé dû à Weil de construction des représentations supercuspidales et spéciales (voir [Ge, Chap.7.A.], prop.1.6.5.). Il permet étant une extension quadratique K_p de $\mathbb{Q}_p$, et un caractère α_p de $\mathbb{Q}_p^*$, de construire une représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ irréductible supercuspidale, si le caractère ne se factorise par la norme, et spéciale sinon. On la notera r_{K_p,α_p}. On obtient ainsi dans le cas $p \neq 2$ toutes les représentations supercuspidales. Dans le cas $p = 2$, il existe des représentations supercuspidales dites extraordinaires qui ne peuvent s'obtenir par ce procédé. Ce procéde se globalise, i.e qu'étant donné une extension quadratique K de $\mathbb{Q}$ et un caractère α des idèles $\mathbf{A}_K^*$, on peut associer une représentation irréductible automorphe cuspidale -si le caractère ne se factorise par la norme- de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ ([Ge, Chap.7.B.]), on la notera $r_{K,\alpha}$.

Rappelons aussi que dans le cas où $p \neq 2$, toutes les représentations irréductibles galoisiennes qui interviennent sont de la forme $\mathrm{ind}_{\mathrm{G_L}}^{\mathrm{G_{\mathbb{Q}_p}}}(\alpha_\mathrm{p})$, où L est une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$ et α_p un caractère du groupe G_L (cf. th.1.5.2.) distinct de son conjugué.

Proposition 7.2. *Soient p et l deux nombres premiers distincts, N et k deux entiers, $k \geq 2$. Soit f une forme modulaire nouvelle propre pour les opérateurs de Hecke, de niveau N et de poids k. Supposons que la représentation $\pi_{f,p}$ est supercuspidale, de la forme r_{K_p,α_p}. Alors la représentation galoisienne $\rho_{f,p}$ est équivalente à* $\mathrm{ind}_{\mathrm{G_{K_p}}}^{\mathrm{G_{\mathbb{Q}_p}}}(\alpha_\mathrm{p}.|\ |_\mathrm{p}^{-1/2})$.

Preuve. On choisit une extension quadratique K de $\mathbb{Q}$ et un caractère α de $\mathbf{A}_K^*$ tels que $K \otimes \mathbb{Q}_p \simeq K_p$ et $\alpha_{|K_p} = \alpha_p$. La représentation de Weil $r_{K,\alpha}$ à un facteur local en p équivalent à $\pi_{f,p}$, et correspond à une nouvelle forme parabolique propre g. Par le théorème précédent les représentations $\rho_{f,p}$ et $\rho_{g,p}$ sont équivalentes. En presque toutes les places q de K, la représentation r_{K,α_q} est non ramifiée de la forme $r_{K,\alpha_q} \simeq \mathrm{ind}(\alpha_{1,q}|\ |^{1/2}, \alpha_{2,q}|\ |^{-1/2})$ par construction. Il s'ensuit par le théorème précédent que la représentation $\rho_{g,q}$ est équivalente à la représentation $\alpha_{1,q}|\ |_q^{-1/2} \oplus \alpha_{2,q}|\ |_q^{-1/2}$. Or on a aussi l'équivallence $\mathrm{ind}_{G_K}^{G_\mathbb{Q}}(\alpha|\ |^{-1/2})_{|D_q} \simeq \alpha_{1,q}|\ |_q^{-1/2} \oplus \alpha_{2,q}|\ |_q^{-1/2}$. Aussi par le théorème de Chebotareff, les représentations $\rho_{g,p}$ et $\mathrm{ind}_{\mathrm{G_{K_p}}}^{\mathrm{G_{\mathbb{Q}_p}}}(\alpha_\mathrm{p}.|\ |_\mathrm{p}^{-1/2})$ sont équivalentes. □

Corollaire 7.3. *Soient p et l deux nombres premiers distincts, N et k deux entiers, $k \geq 2$. Soit f une forme modulaire nouvelle propre pour les opérateurs de Hecke, de niveau N et de poids k. Alors la représentation admissible irréductible $\pi_{f,p}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ détermine la restriction $\rho_{f,p}$ de la représentation galoisienne associée à f au groupe de décomposition en p. La relation, en ommettant les cas extraordinaires, est la suivante :*

représentation *locale* $\pi_{f,p}$	*principale* $\pi(\alpha, \beta)$	*spéciale* $\mathrm{Sp}\alpha$	*supercuspidale* $r_{K,\alpha}$
représentation *locale* $\rho_{f,p}$	*décomposée* $\alpha\vert\,\vert_p^{-1} \oplus \beta$	*indécomposable* $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & * \\ 0 & \alpha\vert\,\vert_p^{-1}\end{smallmatrix}\right)$	*irréductible* $\mathrm{ind}_{\mathrm{G_K}}^{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}}}(\alpha.\vert\,\vert_\mathrm{p}^{-1/2})$

Remarque 7.4. *Si on oublie les cas extraordinaires -ils n'interviennent que pour* p *égal à* 2*-, on peut voir que la correspondance* $\rho(.)$ *que l'on obtient entre représentations admissibles irréductibles de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes locales de dimension* 2 *de* G_p *est, dans les termes de Deligne dans [De1, 3.2.], la correspondance de Tate. Elle est caractérisée par les égalités suivantes pour tout caractère* χ *de* $\mathbb{Q}_p^*$*, et pour tout caractère additif* Ψ *non trivial de* $\mathbb{Q}_p$ *:* $L(\pi_p \otimes \chi, s) = L(\rho(\pi_p) \otimes |\,|_p^{1/2} \otimes \chi, s)$ *et* $\epsilon(\pi_p \otimes \chi, s, \Psi) = \epsilon(\rho(\pi_p) \otimes |\,|_p^{1/2} \otimes \chi, s, \Psi)$*. On peut aussi remarquer que les conducteurs de* π_p *et* $\rho(\pi_p)$ *sont égaux. On aimerait inclure les cas extraordinaires, mais cela est plus complexe.*

Remarque 7.5. *Si on se place au niveau du* $\overline{\mathbb{Q}}_l$*-espace vectoriel* H^1*, les résultats obtenus permettent d'associer, pour* $p \neq l$*, à toute représentation admissible irréductible de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*, une représentation galoisienne de* G_p *de dimension* 2*. La correspondance ainsi obtenue est celle noté* σ *dans [Ca1, 0.5], ou* σ_H *dans [Ny]. Ces deux dernières références traitent le cas extraordinaire. Dans [Ca1] par des méthodes de changements de base développés par Langlands, et dans [Ny] en utilisant des formes modulaires de poids* 1*.*

Références

[AtLe] A. Atkin and J. Lehner. *Hecke operators for* $\Gamma_0(N)$. Maths. Ann. 185.

[Ba] A. Badulescu. *Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de caractéristique non nulle.* Thèse, Université Paris-Sud (janvier 1999).

[Bo] S. Bosch, U. Guntzer, R. Remmert *Non-archimedean Analysis.* A series of comprehensive studies in mathematics, Springer-Verlag 261 1984.

[Boy] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et conjecture de Langlands locale. Thèse, Université de Paris-Sud (octobre 1998).

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. *Néron models.* Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge, Band 21.

[Ca1] H. Carayol. *représentations l-adiques.* Annales de l'E.N.S vol1 1986.

[Ca2] H. Carayol. Séminaire Bourbaki, Exposé 857 (mars 1999).

[De1] P. Deligne. *Formes modulaires et représentations l-adiques.* Séminaire Bourbaki numéro 355 (Février 1969).

[De2] P. Deligne. *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L.* Modular functions of one variable II. Springer Lecture Notes in Mathematics 349.

[De3] P. Deligne. *Lettre à Piateskii Shapiro* 1973.

[De4] P. Deligne. *Formes modulaires et représentations de* GL_2. In : Modular functions of one variable II. Springer Lecture Notes in Mathematics 349.

[De5] P. Deligne. *SGA 4.5 : Cohomologie étale.* Springer Lecture Notes in Mathematics 569.

[DeRa] P. Deligne et M. Rapoport. *Les schémas de modules de courbes elliptiques.* Springer Lecture Notes in Mathematics 349.

[DiIm] F. Diamond & J. Im. *Modular forms and modular curves.* Canadian Mathematical Society Conference 65.

[DiTa] F. Diamond and R. Taylor. *Non-optimal levels of mod l modular representations* Inventiones mathematicae 115, 1994.

[Ge] S. Gelbart. *Automorphic forms on adele group.* Priceton Study 83, 1975.

[Gr] A. Grothendieck. *Séminaire de géométrie algébrique.* Springer Lecture Notes in Mathematics 151, 152, 153, 224, 225, 269, 270, 288, 305, 340, 589.

[Gr] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique.* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960–1967).

[Gr1] B.H. Gross. *Heights and the special values of L-series.* Canadian Mathematical Society Conference Proceedings Volume 7 (1987)

[Gr2] B.H. Gross. *A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod p).* Duke Mathematical Journal 61 (Oct. 90)

[HaTa] M. Harris and R. Taylor. *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties.* Preprint 1998.

[He] G. Henniart. *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL_n *sur un corps p-adique.* Invent. Math. **139** (2000) no. 2, 439–455.

[JaLa] H. Jacquet et R.P. Langlands. *Automorphic Forms on* $\mathrm{GL}(2)$. Springer Lecture Notes in Mathematics 114.

[JoLi] B. W. Jordan et R. Livné. *Integral Hodge theory and congruences between modular forms.* Duke Mathematical Journal Vol. 80, 1995.

[Ka1] N. Katz. *Surfaces algébriques.* Springer Lecture Notes in Mathematics 868.

[Ka2] N. Katz. *p-adic properties of modular schemes and modular forms.* Modular functions of one variable III. Springer Lecture Notes in Mathematics 350.

[Ku] P. Kutzko *The Local Langlands Conjecture for* GL(2) Annals of Mathematics 112, 1980.

[Ko] N. Koblitz. *introduction to elliptic curves and modular forms.* Gruaduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag (1984).

[KaMa] N. Katz et B. Mazur. *Arithmetic moduli of elliptic curves.* Annals of Mathematics Studies 108, Princeton University Press (1985).

[Laf] L. Lafforgue. *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands.* Preprint Orsay, 2000.

[La] S. Lang. *Introduction to modular forms.*

[LL] R.P. Langlands. *Modular forms and l-adic representations.* Modular functions of one variable II. Springer Lecture Notes in Mathematics 349.

[Mi] Milne. *Etale cohomology.*

[Ny] L. Nyssen. *Représentations Extraordinaires* Compositio Math. 115 No 3, 1999.

[Sa] T. Saito. *Modular forms and p-adic Hodge theory.* Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 607–620.

[Se1] J.P. Serre. *Abelian l-adic representations and elliptic curves.*

[Se2] J.P. Serre. *Corps locaux.* Herman.

[Se3] J.P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Herman, 1971.

[SpBl] S. Bloch. *De Rham cohomology and conductors of curves.* Duke math. J. 54, 1987.

[We] A. Weil *Exercices dyadiques* Inv. Math. 27.