AXIOMATIEK VAN GETALLEN, vergezichten vanuit mijn ivoren toren

Bas Edixhoven

Universiteit Leiden

KNAW symposium “Rekenen”, 30 juni 2014

Wat volgt is slechts mijn eigen mening.

Deze aantekeningen zal ik op mijn homepage plaatsen.

Plato, De Republiek, over onderwijs en rekenkunde

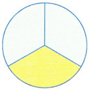
Rekenkunde is belangrijk, en de discussie erover is van alle tijden.

And to our higher purpose no science can be better adapted; but it must be pursued in the spirit of a philosopher, not of a shopkeeper. It is concerned, not with visible objects, but with abstract truth; for numbers are pure abstractions—the true arithmetician indignantly denies that his unit is capable of division. When you divide, he insists that you are only multiplying; his "one" is not material or resolvable into fractions, but an unvarying and absolute equality; and this proves the purely intellectual character of his study. Note also the great power which arithmetic has of sharpening the wits; no other discipline is equally severe, or an equal test of general ability, or equally improving to a stupid person.

Vermenigvuldigen van breuken, HAVO/VWO.

14a Van een taart is nog $\frac{1}{3}$ deel over. Isa, Roos, Jamil en Sylvia verdelen dit stuk eerlijk.
Leg uit dat ze allemaal $\frac{1}{12}$ deel van de taart krijgen.

b Vier kinderen delen een halve taart.
Leg uit dat hier de berekening $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ bij hoort.



$\frac{1}{3}$

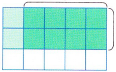
$\frac{1}{4}$ van $\frac{1}{3}$

THEORIE

Breuken kun je **vermenigvuldigen** door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers ook.
Zo geldt dat $\frac{1}{5}$ deel van $\frac{1}{3}$ hetzelfde is als $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

Voorbeeld

$\frac{4}{5}$



$\frac{2}{3}$

In de figuur hiernaast zie je dat $\frac{2}{3}$ van $\frac{4}{5}$ hetzelfde is als $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

$\frac{2}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{12}{49}$

$\frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{10} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$

$\frac{11}{12} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{12} - \frac{6}{12} = \frac{5}{12}$

15 Bereken.

a $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} =$

b $\frac{3}{7} \times \frac{3}{4} =$

c $\frac{5}{9} \times \frac{7}{11} =$

d $\frac{3}{8} \times -\frac{2}{5} =$

e $\frac{4}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} =$

f $\frac{2}{5} \times \frac{7}{8} - \frac{3}{20} =$

g $\frac{1}{4} \times (\frac{3}{14} + \frac{5}{14}) =$

h $-\frac{7}{8} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} =$

Een paar hedendaagse voorbeelden

Haakjes, optelling en vermenigvuldiging, HAVO/VWO (1).

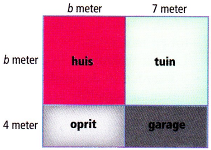
9 Hiernaast zie je een tekening van een stuk grond met een huis van b meter bij b meter. De tuin is 7 meter diep. De oprit en de garage zijn 4 meter breed.

a Hoe groot wordt de oppervlakte van het huis als $b = 8$? En hoe groot wordt dan de oppervlakte van de tuin? En de oppervlakte van het hele stuk grond?

b Geef een formule voor de oppervlakte van het huis, voor die van de tuin, voor die van de garage en voor die van de oprit.

c Geef met behulp van opdracht b een formule voor de totale oppervlakte van het stuk grond.

d Vul in: Voor de oppervlakte van het stuk grond geldt de formule $A = (b + ...)(b + ...)$.



10 Een vierkant met zijden a cm wordt aangevuld tot de rechthoek hiernaast.

a Vul in.
Voor de oppervlakte A van de rechthoek geldt de formule $A = (a + ...)(a + ...)$.

b Neem de rechthoek over en vul op de stippeltjes de oppervlakten in.

c Vul in. $A = a^2 + ... + ... + ...$

d Neem de gelijksoortige termen in de formule van opdracht c samen en schrijf de formule korter.

Een paar hedendaagse voorbeelden

Haakjes, optelling en vermenigvuldiging, HAVO/VWO (2).

THEORIE

Om de formule $h = (q+2)(q+5)$ **zonder haakjes te schrijven** kun je een rechthoek gebruiken.
Hiernaast zie je dat deze formule hetzelfde is als
$h = q^2 + 2q + 5q + 10$. Korter geschreven
$h = q^2 + 7q + 10$.

	q	5
q	q^2	$5q$
2	$2q$	10

12 Teken bij de volgende formules eerst een rechthoek zoals hierboven, werk daarna de vermenigvuldiging uit en neem de gelijksoortige termen samen.

a $y = (x+5)(x+2)$
b $h = (t+1)(t+4)$
c $k = (u+4)(u+3)$
d $n = (k+5)(k+5)$
e $x = (y+3)(y+1)$
f $h = (q+3)(q+2)$

13 Schrijf de volgende formules zonder haakjes. Teken zo nodig eerst een rechthoek.

a $r = (2f+3)(f+4)$
b $k = (3n+4)(2n+6)$
c $y = (2x+1)(4x+3)$
d $b = (4v+6)(0{,}5v+8)$
e $m = (4+2j)(j+5)$
f $a = (12c+2)(0{,}25+2c)$
g $z = (4+k)(2k+6)$
h $p = (3q+4)(q+2)$

14a Laat zien dat de formule $s = (t+2)(t+8)$ een kwadratische formule is door de haakjes weg te werken.
b Leg uit dat bij $t = -9$ de uitkomst $s = 7$ hoort.
c Vul de tabel hieronder in.

Voorbeeld

Schrijf de formule
$p = (2q+5)(3q+1)$ zonder haakjes.

Oplossing

1

	q q	5
q q q	$6q^2$	$15q$
1	$2q$	5

2 $p = 6q^2 + 2q + 15q + 5$
3 $p = 6q^2 + 17q + 5$

Een paar hedendaagse voorbeelden

Uw hypotheek. Uit een brief van ING.

Voorbeeld:
U hebt een hypotheek van E 200.000. U hebt een rentevaste periode van 10 jaar met een rente van 6,5%. De restant periode is nog 5 jaar. De actuele rente voor een nieuwe rentevaste periode van 5 jaar is 5,0%.
U wilt uw hypotheek volledig aflossen.
Het boetevrije bedrag is E 200.000 x 20% = E 40.000.
U bent boete verschuldigd over de extra aflossing van E 200.000 - E 40.000 = E 160.000.
De boete wordt berekend over het verschil in rente over het hypotheekbedrag gedurende de restant rentevaste periode. En dit wordt contant gemaakt op de ingangsdatum van de nieuwe rentevaste periode.
De berekening van de boete is:
(6,5% - 5,0%) x E 160.000 x 5 jaar = bruto E 12.000 en dat contant gemaakt is E 10.598,14.

De formule voor de berekening van de boete met contante waarde voor maandbetaling is:

$(p/q - 1) \times h \times (1 - 1/(1 + q/1200)^n)$

p = de contractrente
q = de actuele rente
h = hypotheekbedrag minus het bedrag dat boetevrij mag worden afgelost
n = de restant rentevaste periode in maanden

Kunt u zo'n formule gebruiken? Helpen de taarten en rechthoeken u? Begrijpt u deze formule, of bent u aan de bank overgeleverd?

Waarom nu een vergezicht?

Vergezichten zijn nuttig: ze motiveren, ze leggen uit waar iemand voor staat, ze overstijgen de bomen waardoor je het bos niet ziet.

Bij nieuwe inzichten kunnen en moeten ze worden bijgesteld.

Wat wil ik dan betogen?

- Er moet meer geredeneerd worden, binnen de wiskunde, overal. Ik wil dat er meer “waarom” vragen gesteld en beantwoord worden.
- Wat per niveau realistisch is, is een vraag voor de didactici.
- Bewijzen komen nu zeldzaam voor in het wiskunde onderwijs, bijna alleen in de meetkunde.
- Het is niet meer van deze tijd om rekenen alleen te baseren op meetkunde en plaatjes.
- Het lijkt alsof de grondslagen van de wiskunde van na 1900 niet zijn doorgedrongen in het onderwijs.
- Ik wil dat in ieder geval leraren op de hoogte zijn van de axiomatiek van getallen, en dit in hun onderwijs uitdragen.
- Onderwijs in programmeren zou bij dit alles mooi aansluiten.

Axiomatiek van getallen, wat is dat dan?

De wiskunde garandeert het bestaan van getalsystemen zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, de gehele getallen $\mathbb{Z}$, de rationale getallen $\mathbb{Q}$ en de reële en complexe getallen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, tezamen met de elementen 0 en 1, en de gebruikelijke operaties erop, zoals optelling, vermenigvuldiging, en de relatie kleiner dan, zodat aan bepaalde axioma's wordt voldaan.

Ook garandeert de wiskunde dat deze axioma's de getalsystemen eenduidig bepalen.

In het bijzonder kunnen alle rekenregels uit deze axioma's worden afgeleid.

Waarom onderwijzen we dit soort afleidingen niet?

Een voorbeeld

Axioma's voor optelling in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

- **Associativiteit**. Voor alle a, b en c: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
- **Commutativiteit**. Voor alle a, b: $a+b = b+a$.
- **Nul-element**. Voor alle a: $a+0 = a$.
- **Additieve inverse**. Voor alle a is er een b met $a+b = 0$.

Stelling. Additieve inversen zijn uniek, d.w.z., voor iedere a is er precies één b met $a+b=0$.

Bewijs. Neem aan dat $a+b=0$ en $a+c=0$. Dan geldt $c = c+0 = c+(a+b) = (c+a)+b = (a+c)+b = 0+b = b+0 = b$.

Notatie: de additieve inverse van a is $-a$.

Opgave: bewijs, voor alle a, dat $-(-a) = a$.

Definitie van aftrekken: $a-b := a+(-b)$.

Nog een voorbeeld

Overige axioma's voor optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

- **Associativiteit.** Voor alle a, b en c: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Commutativiteit.** Voor alle a, b: $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Eenheids-element.** Voor alle a: $1 \cdot a = a$.
- **Multiplicatieve inverse.** Voor alle $a \neq 0$ is er een b met $a \cdot b = 1$.
- **Distributiviteit.** Voor alle a, b en c: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Multiplicatieve inversen zijn uniek, notatie: a^{-1}.

Opgave: bewijs, voor alle $b \neq 0$ en $d \neq 0$, dat $(b \cdot d)^{-1} = b^{-1} \cdot d^{-1}$.

Definitie van delen: voor a en b met $b \neq 0$: $a/b := a \cdot b^{-1}$.

Optellen van breuken

Vanwege associativiteit kunnen we veel haakjes weglaten. We hanteren de gebruikelijke volgorde van bewerkingen: eerst vermenigvuldigen, dan optellen.

Voor alle a, b, c, d met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= a{\cdot}b^{-1} + c{\cdot}d^{-1} \\
&= a{\cdot}1{\cdot}b^{-1} + c{\cdot}1{\cdot}d^{-1} \\
&= a{\cdot}(d{\cdot}d^{-1}){\cdot}b^{-1} + c{\cdot}(b{\cdot}b^{-1}){\cdot}d^{-1} \\
&= (a{\cdot}d){\cdot}(b^{-1}{\cdot}d^{-1}) + (b{\cdot}c){\cdot}(b^{-1}{\cdot}d^{-1}) \\
&= (a{\cdot}d + b{\cdot}c){\cdot}(b^{-1}{\cdot}d^{-1}) \\
&= (a{\cdot}d + b{\cdot}c){\cdot}(b{\cdot}d)^{-1} \\
&= \frac{a{\cdot}d + b{\cdot}c}{b{\cdot}d}.
\end{aligned}$$

Nogmaals mijn betoog (+ε)

- Er moet meer geredeneerd worden, binnen de wiskunde, overal. Ik wil dat er meer “waarom” vragen gesteld en beantwoord worden.
- Wat per niveau realistisch is, is een vraag voor de didactici.
- Bewijzen komen nu zeldzaam voor in het wiskunde onderwijs, bijna alleen in de meetkunde.
- Het is niet meer van deze tijd om rekenen alleen te baseren op meetkunde.
- Ik wil dat in ieder geval leraren op de hoogte zijn van axiomatiek (verzamelingen, afbeeldingen, getallen) en bewijzen, zoals onderwezen aan de eerstejaars studenten wiskunde aan de universiteiten, en dit in hun onderwijs uitdragen.
- Onderwijs in programmeren zou bij dit alles mooi aansluiten.