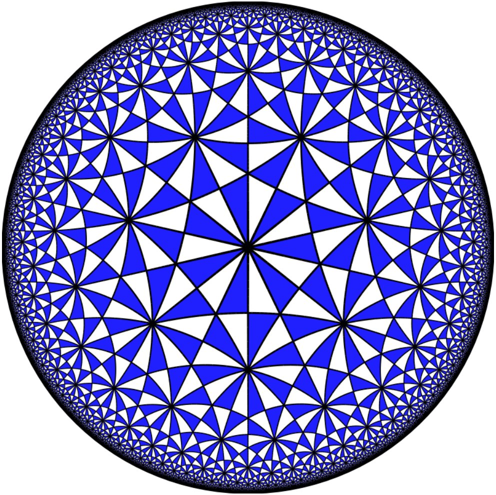
Abelprijs 2018 voor Langlands

In 2018 kreeg Robert Langlands de Abelprijs, voor zijn werk dat symmetrieën in de analyse in verband brengt met symmetrieën in de getaltheorie.

Doel van deze voordracht: iets van die symmetrieën laten zien.

Symmetrieën in de analyse



Symmetrieën in de analyse komen vaak uit meetkunde.

Zoals hier uit de eenheidsschijf met de hyperbolische metriek.

De "lijnen" zijn hier cirkelbogen die de rand loodrecht snijden. De hoeken van de driehoeken zijn $\pi/2$, $\pi/3$ en $\pi/7$.

Hier werkt een discrete ondergroep van $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Fourier analyse hierop?

Symmetrieën in de analyse, eenvoudig voorbeeld

$V := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f$ is continu en $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(x+n) = f(x)\}$.

V is een $\mathbb{C}$-vectorruimte, en is compleet voor de sup-norm.

Inproduct op V: $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$.
V is niet compleet voor de L^2 norm $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$.

Voorbeeld: $z\colon [-1/2, 1/2) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x$ (de zaagtand-functie) is limiet van een Cauchyrij (voor $\|\cdot\|$) in V.

Voor $b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}_b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + b$, en $\mathrm{tr}_b^*\colon V \to V$, $f \mapsto f \circ \mathrm{tr}_b$.
De eigenfuncties voor de tr_b^* zijn de $e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{2\pi inx}$, met $n \in \mathbb{Z}$.
Ze vormen een Hilbertbasis van de completering $V^\wedge$ van V.

$$\frac{1}{12} = \|z\|^2 = \sum_n |\langle z, e_n\rangle|^2 = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2}\,, \quad \text{dus} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Wat hebben we geleerd, en waar gaat het heen?

De werking van de optelgroep van $\mathbb{R}$ door translaties op de complexe vectorruimte van functies op de cirkel $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathrm{S}^1$ heeft ons gegeven dat $\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} n^{-2} = \pi^2/6$ (Euler, 1734, oplossing van het Baselprobleem). Dus de analyse heeft bijgedragen aan het begrijpen van $\zeta\colon \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, $s \mapsto \sum_{n\geq 1} n^{-s}$, de Riemann zeta-functie.

De eigenfuncties e_n waren hierbij essentieel.

Algemener. Voor $n \geq 1$, harmonische analyse met groepen als $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, op ruimten zoals $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dus definieer V als $\{f\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : f \text{ continu}, \forall x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall \gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), f(\gamma x) = f(x)\}$.

Dan werkt $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ op V door: $(g, f) \mapsto g{\cdot}f$ met $g{\cdot}f\colon x \mapsto f(xg)$: V is een *representatie* van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Wat zijn de irreducibele deelrepresentaties van V?

Waar gaat het nog verder heen: *p*-adiek

Voor p een priemgetal, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, laat $v_p(n)$ het aantal factoren p in n zijn.

Voor $x = a/b$ in $\mathbb{Q}$, met $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, laat $|x|_p := p^{v_p(b) - v_p(a)}$, dit is de *p-adische absolute waarde* op $\mathbb{Q}$. Dus $|p|_p = 1/p$ en $|1/p|_p = p$ (p is klein en $1/p$ is groot).

$\mathbb{Q}_p$ is dan de completering van $\mathbb{Q}$ voor $|\cdot|_p$, net als $\mathbb{R}$ die is voor $|\cdot|$. Dan is $\mathbb{Q}_p$ een lokaal compact topologisch lichaam, totaal onsamenhangend, waar $\mathbb{Q}$ dicht in zit.

$\mathbb{Q}_p = \{\cdots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall i,\, a_i \in \{0, \ldots, p-1\}\}$, met optellen en vermenigvuldigen zoals voor getallen uitgeschreven in basis p.

Ook de continue representaties van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ op complexe vectorruimten moeten bestudeerd worden.

Waarom al deze $\mathbb{Q}_p$? Adèles!

Ostrowski: $|\cdot|$ en de $\|\cdot|_p$ zijn, op equivalentie na, precies de niet-triviale absolute waarden op $\mathbb{Q}$.

Voor p priem, $\mathbb{Z}_p = \{\cdots a_3 a_2 a_1 a_0 : a_i \in \{0, \ldots, p-1\}\}$, de p-adische completering van $\mathbb{Z}$. Het is een compacte topologische ring.

$\mathbb{A} := \{x = (x_\infty, (x_p)_p) \in \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Q}_p$: voor bijna alle p: $x_p \in \mathbb{Z}_p\}$, dit is de ring van *adèles* (Artin-Whaples, 1945).

Op $\mathbb{A}$ is een unieke topologie, invariant onder translaties, waarin $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Z}_p$ open is, en de producttopologie heeft.

Dan is $\mathbb{Q}$ discreet in $\mathbb{A}$, en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ is compact! Vergelijkbaar met met $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$.

Symmetrieën in de getaltheorie

De symmetrieën in de getaltheorie zijn lichaamsautomorfismen.

Complexe conjugatie: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = a + bi \mapsto \overline{z} = a - bi$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\sigma\colon a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \sigma$ is bijectief, behoudt $+$ en $\cdot\}$.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ is heel groot, maar er zijn er maar 2 continu.

Voor $f = x^d + f_{d-1}x^{d-1} + \cdots + f_1 x + f_0$ in $\mathbb{C}[x]$ laat $Z_{\mathbb{C}}(f) := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$, en laat $v_z(f)$ de multipliciteit van dit nulpunt zijn. Dan

$$f = \prod_{z \in Z_{\mathbb{C}}(f)} (x - z)^{v_z(f)}.$$

Galoisgroepen

Voor σ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ en $a \in \mathbb{Q}$: $\sigma(a) = a$ (want $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$ etc.)

Voor $f = x^d + f_{d-1}x^{d-1} + \cdots + f_1x + f_0$ in $\mathbb{Q}[x]$ en σ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, en $z \in Z_{\mathbb{C}}(f)$: $\sigma(z) \in Z_{\mathbb{C}}(f)$:

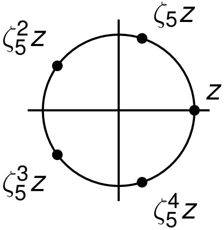
$$\begin{aligned} 0 = \sigma(0) = \sigma(z^d + f_{d-1}z^{d-1} + \cdots + f_1z + f_0) = \\ = \sigma(z^d) + \sigma(f_{d-1}z^{d-1}) + \cdots + \sigma(f_1z) + \sigma(f_0) = \\ = \sigma(z)^d + f_{d-1}\sigma(z)^{d-1} + \cdots + f_1\sigma(z) + f_0 = f(\sigma(z))\,. \end{aligned}$$

Dus σ permuteert $Z_{\mathbb{C}}(f)$. De groep van permutaties van $Z_{\mathbb{C}}(f)$ gegeven door σ's uit $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ heet de *Galoisgroep* $\mathrm{Gal}(f)$ van f.

Voorbeeld van een Galoisgroep

We nemen $f = x^5 - 2$. Laat $\zeta_5 := e^{2\pi i/5}$ en $z = 2^{1/5}$, dan $Z_{\mathbb{C}}(f) = \{\zeta_5^x z : x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$.

$\mathrm{Gal}(f) = \{\sigma_{a,b} : a \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$



$a \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$

$b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\sigma_{a,b} \colon \zeta^x z \mapsto \zeta^{ax+b} z$

Galoisrepresentaties en Frobenius-elementen

Laat nu $f = x^x + f_{d-1}x^{d-1} + \cdots + f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ met enkelvoudige nulpunten (in $\mathbb{C}$), en $\rho\colon \mathrm{Gal}(f) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ een injectief morfisme van groepen (dit heet een *Galoisrepresentatie*).

Voor priemgetallen p die niet de discriminant van f delen, heeft f enkelvoudige nulpunten in $\overline{\mathbb{F}}_p$ (algebraïsche afsluiting van $\mathbb{F}_p$). Notatie: $Z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(f)$.

De Frobenius-afbeelding $\overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$, $x \mapsto x^p$, is een lichaamsautomorfisme.

Voor $p \nmid \mathrm{discr}(f)$ geeft (d.m.v. 2e en 3e jaars algebra) een keuze van $\mathbb{C} \supset \overline{\mathbb{Q}} \supset \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ een bijectie $Z_{\mathbb{C}}(f) \to Z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(f)$, en daarmee een Frobenius-element Frob_p in $\mathrm{Gal}(f)$ (uniek op conjugatie na).

De brug tussen analyse en getaltheorie: *L*-functies

Voor f en ρ als op de vorige slide, en $s \in \mathbb{C}$ met $\Re(s) > 1$:

$$L(\rho, s) := \prod_{p \nmid \mathrm{discr}(f)} \frac{1}{\det(1 - p^{-s}\rho(\mathrm{Frob}_p))}$$

Vermoeden (Emil Artin, 1923): zulke $L(\rho, -)$ hebben een meromorfe voortzetting op $\mathbb{C}$, en voldoen aan een expliciete functionaalvergelijking tussen $L(\rho, s)$ en $L(\rho^\vee, 1-s)$.

Klasselichamentheorie (veel personen, rond 1930): Artin's vermoeden is waar voor inducties van een 1-dimensionale representaties.

Vermoeden (Langlands, 1966): voor elke ρ is er een *automorfe representatie* π_ρ van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ met $L(\pi_\rho, -) = L(\rho, -)$, en $L(\pi_\rho, -)$ heeft meromorfe voortzetting in functionaalvergelijking.

Zie ook `http://pub.math.leidenuniv.nl/~edixhovensj/publications/2019/nieuw_archief_langlangds.pdf`