Lineaire algebra I (wiskundigen)

Tentamen, donderdag 21 januari, 2016

Geen rekenmachines, dictaat of aantekeningen. **Motiveer elk antwoord!**

Opgave 1 (7 punten). Voor elk reëel getal $a \in \mathbb{R}$ bekijken we het systeem

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + ax_2 + 4x_3 &= 3 \\ \phantom{-x_1 +{}} ax_2 + ax_3 &= 2 \end{cases}$$

van lineaire vergelijkingen in x_1, x_2 en x_3.

(a) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ zijn er minstens twee oplossingen?

(b) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling voor alle a uit het antwoord op deel (a).

Opgave 2 (6 punten). Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 2x_2 - 2x_3 \}$$

en $L = V^\perp$. Bereken de afstand van het punt $p = (2, -1, 1)$ tot L.

Opgave 3 (8 punten). Zij V een reële vectorruimte met basis $B = (v_1, v_2, v_3)$.
Stel $f \colon V \to V$ is een lineaire afbeelding waarvoor geldt

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

We definiëren

$$v_1' = v_2 + v_3, \qquad v_2' = v_1 + v_3 \qquad \text{en} \qquad v_3' = -v_1 + 2v_2.$$

(a) Is f een isomorfisme?

(b) Laat zien dat $B' = (v_1', v_2', v_3')$ een basis is voor V.

(c) Bereken de matrix $[f]_{B'}^{B'}$.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

Opgave 4 (10 punten). WAAR of NIET WAAR? Geef een korte uitleg als de uitspraak waar is. Als het niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld waar dat uit blijkt. Vergeet niet ook je conclusie duidelijk te vermelden: WAAR of NIET WAAR!

(a) Voor elk positief geheel getal n en elke twee $n \times n$ matrices A en B geldt
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A) \cdot \mathrm{Tr}(B).$$
(b) Voor elke lineaire deelruimtes U, V, W van $\mathbb{R}^2$ geldt
$$U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W).$$
(c) Als twee 2×2 matrices hetzelfde spoor en dezelfde determinant hebben, dan zijn ze gelijkvormig[1] (Engels: 'similar').

(d) Voor elke lineaire afbeelding $\varphi\colon \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$ is er een 3×2 matrix M is zodanig dat $\varphi(A) = MA$ voor alle $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(e) Elke injectieve lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ van een vectorruimte V naar zichzelf is ook surjectief.

Opgave 5 (8 punten). Voor elk geheel getal $n \geq 2$ definiëren we de $n \times n$ matrices
$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad N_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix},$$
waarbij M_n bestaat uit alleen maar 1-en en N_n bestaat uit 2-en op de diagonaal en verder alleen maar 1-en.

(a) Laat zien dat M_n precies twee eigenwaarden heeft.

(b) Is M_n diagonaliseerbaar?

(c) Wat is het karakteristiek polynoom van M_n?

(d) Wat is de determinant van N_n?

Opgave 6 (6 punten). Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Stel dat er geldt
$$(\mathrm{im}\, f) \cap (\ker f) = \{0\}.$$
Bewijs dat het beeld $(\mathrm{im}\, f)$ en de kern $(\ker f)$ van f dan complementaire ruimtes zijn.

[1] Twee matrices A en A' zijn gelijkvormig als er een inverteerbare matrix Q is zodanig dat $A' = QAQ^{-1}$.