Oplossing prijsvraag Lineaire Algebra 1

Bas Edixhoven

20 december 2016

De prijsvraag zelf was als volgt.

> Een boer heeft 2017 geiten. Voor elk van die geiten geldt dat de overige 2016 geiten in 2 groepen van 1008 geiten verdeeld kunnen worden zodat elk van de 2 groepen hetzelfde totale gewicht heeft. Te bewijzen: alle geiten zijn even zwaar.

Dit is niet een probleem dat ik zelf heb bedacht. In een andere vorm staat het in het boek "A Moscow Math Circle: Week-by-week Problem Sets" (Sergey Dorichenko, MSRI Mathematical Circles Library Volume 8, 2012). Daar gaat het om 101 koeien.

Dan de oplossing. We nummeren de geiten, met de getallen 1 tot en met 2017. Laat $g_i \in \mathbb{R}$ het gewicht van geit i zijn (het zou iets makkelijker worden als we aannamen dat de gewichten in $\mathbb{Q}$ zaten, maar dan komt er natuurlijk welverdiende kritiek). Dan is er gegeven dat er voor iedere i in $\{1, \ldots, 2017\}$ er een identiteit geldt van de vorm

$$\sum_{j=1}^{2017} a_{i,j} g_j = 0,$$

met de $a_{i,j}$ in $\{-1, 0, 1\}$, $a_{i,i} = 0$, $a_{i,j} = -1$ voor 1008 j's ongelijk aan i, en $a_{i,j} = 1$ voor de overige 1008 j's ongelijk aan i. Merk op dat we niet weten waar precies de 1'en en -1'en staan, we weten alleen maar hoeveel er zijn.

Laat $A \in \mathrm{Mat}(2017 \times 2017, \mathbb{R})$ de matrix zijn met deze coëfficiënten; A heeft 2017 rijen en 2017 kolommen. Dan is de vector g met coördinaten de g_i in de kern van A. Omdat iedere rij bestaat uit één 0, 1008 -1'en en 1008 1'en, is de vector $c = (1, 1, \ldots, 1)$ (alle 2017 coördinaten gelijk aan 1) ook in de kern: $L(c) \subseteq \ker(A)$. Als we nu aantonen dat $\mathrm{rk}(A) = 2016$, dan is, vanwege de stelling over rang en dimensie van de kern, $\ker(A)$ van dimensie 1, en dus gelijk aan $L(c)$. Dan geldt $g \in L(c)$ en dat betekent precies dat alle geiten even zwaar zijn.

Claim: de rang van A is 2016.

Bewijs. We hebben het hier over de rang van A als matrix met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Maar we kunnen A ook opvatten als element van $\mathrm{Mat}(2017 \times 2017, \mathbb{Q})$. Als we A door rij-operaties naar gereduceerde rijtrapvorm brengen, dan blijven de coëfficënten in $\mathbb{Q}$, dus de gereduceerde rijtrapvorm in $\mathrm{Mat}(2017 \times 2017, \mathbb{R})$ is hetzelfde als die in $\mathrm{Mat}(2017 \times 2017, \mathbb{Q})$. Dus de rang van

A in $\mathrm{Mat}(2017 \times 2017, \mathbb{R})$ is hetzelfde als die in $\mathrm{Mat}(2017 \times 2017, \mathbb{Q})$. Omdat $0 \neq c \in \ker(A)$ weten we dat $\mathrm{rk}(A) \leq 2016$.

Claim. De eerste 2016 kolommen $v_1, \ldots, v_{2016}$ van A zijn lineair onafhankelijk in $\mathbb{Q}^{2017}$. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Dus neem aan dat ze afhankelijk zijn. Laat $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2016} \in \mathbb{Q}$, niet allen 0, zodat $\sum_i \lambda_i v_i = 0$. Iedere λ_i is van de vorm p_i/q_i met p_i en q_i geheel en $q_i \neq 0$. Laat $q = q_1 q_2 \cdots q_{2016}$. Merk op dat $q \neq 0$. Voor alle i, laat $\lambda_i' = q\lambda_i$. Dan zijn de λ_i' in $\mathbb{Z}$, ze zijn niet allemaal 0 en er geldt dat $\sum_i \lambda_i' v_i = 0$. Als alle λ_i' deelbaar zijn door 2, dan delen we ze allemaal door 2, en we herhalen dit totdat ze niet meer allemaal deelbaar zijn door 2. Dan geldt nog steeds dat $\sum_i \lambda_i' v_i = 0$. Alle λ_i' en alle coördinaten van de v_i zijn in $\mathbb{Z}$. Voor $a \in \mathbb{Z}$, laat $\overline{a} \in \mathbb{F}_2$ de restklasse modulo 2 zijn. Dan zijn de $\overline{\lambda_i'}$ niet allemaal 0, de $\overline{v}_i$ zijn in $\mathbb{F}_2^{2017}$, en er geldt dat $\sum_i \overline{\lambda_i'}\overline{v}_i = 0$. Het grote voordeel hiervan is dat we nu precies weten wat de $\overline{v}_i$ zijn, want in $\mathbb{F}_2$ geldt dat $\overline{-1} = \overline{1}$! Iedere $\overline{v}_i$ heeft een $\overline{0}$ op de i-de coördinaat en alle andere coördinaten zijn $\overline{1}$. Laat nu $w \in \mathbb{F}_2^{2017}$ de vector zijn met alle coördinaten gelijk aan $\overline{1}$.

Claim. $L(w, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{2016}) = \mathbb{F}_2^{2017}$.

Bewijs. Voor iedere i in $\{1, \ldots, 2016\}$ is $w + \overline{v}_i$ de i-de vector e_i van de standaardbasis van $\mathbb{F}_2^{2017}$, en w plus de som van al die e_i is gelijk aan e_{2017}. Dus bevat $L(w, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{2016})$ alle e_i $(1 \leq i \leq 2017)$, dus $L(w, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{2016}) = \mathbb{F}_2^{2017}$.

Maar dan is $(w, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{2016})$ een basis van $\mathbb{F}_2^{2017}$, en zijn $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{2016}$ onafhankelijk. Maar dat is integenspraak met $\sum_i \overline{\lambda_i'}\overline{v}_i = 0$. Dit beëindigt ons bewijs uit het ongerijmde, en we weten nu dat $v_1, \ldots, v_{2016}$ lineair onafhankelijk zijn. Maar dan $\mathrm{rk}(A) \geq 2016$. Omdat we al weten dat $\mathrm{rk}(A) \leq 2016$ hebben we $\mathrm{rk}(A) = 2016$.