Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: LA 1 Naam: Bas Edixhoven

Datum: 19 jan. 2017 Studierichting:

Docent: Edixhoven Collegekaartnummer:

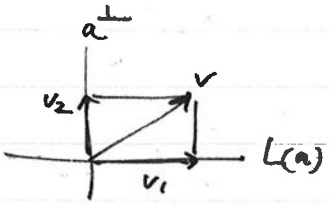
1. (a) 5

(3) $v_1 = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a = \frac{28}{14} \cdot a = 2a = (2,4,-6)$

(2) $V_2 = v - v_1 = (3,2,-7) - (2,4,-6) = (1,-2,-1)$

(Controle: $\langle v_2, a\rangle = \langle (1,-2,-1), (1,2,-3)\rangle = 1-4+3 = 0$.)

(b) 5



$d(v, L(a)) = \|v_2\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$d(v, a^\perp) = \|v_1\| = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} =$
$= 2\cdot\sqrt{14}$.

-3: $d(v, L(a)) = \|v_1\|$

geen $\sqrt{\ }$: -2 $\sqrt{|x_1|+|x_2|}$: -2
o.i.d.

rekenfouten : -1.

2. (a) 10

iedere rekenfout: −2

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot -1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} -3 \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) 5

x_2 en x_4 zijn vrij. +1

$x_2 = 1$ en $x_4 = 0$ geeft: $(-2, 1, 0, 0) = v_1$ +1

$x_2 = 0$ en $x_4 = 1$ geeft: $(-1\ 0, +2, 1) = v_2$. +1

$(-1, 0, 2, 1)$

Basis ker A: (v_1, v_2) +2

rekenfouten (+/−) −1.

- 0-rij niet onderaan −2
- geen 0 boven 2e spil (niet gereduceerd) −3
- spillen niet op volgorde −2

Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak:
Naam:
Datum:
Studierichting:
Docent:
Collegekaartnummer:

3. (a) $Tr(A) = 3$, $\det(A) = 2$, $P_A(t) = \det(t \cdot Id - A) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$. 4

8

$\lambda_1 = +1$, $A - \lambda_1 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ker $(A - I)$ heeft basis $(1,1) = v_1$ 2

$\lambda_2 = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

basis ker$(A - 2I)$: $(1,2) = v_2$ 2

(b) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D = [f_A]_v^v$, met $v = (v_1, v_2)$.

4

Dus $A = [f_A]_E^E = [id]_E^v \cdot [f_A]_v^v \cdot [id]_v^E$, $P = [id]_e^v =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverse van P: -2

$\lambda_1 \leftrightarrow v_2$
$\lambda_2 \leftrightarrow v_1$: -2.

(c) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dan $P_B(t) = t^3$. $E_0(B) \neq \mathbb{R}^3$.

4

dim. 2: basis (e_1, e_3).

Vb: 1
argument: $3 = 1 + 2$
splitst niet diag.baar

(d) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rotatie over $90°$ in $\mathbb{R}^2$.

4

$P_C(t) = t^2 + 1$.

Eigenwaarden: ~~...~~ geen in $\mathbb{R}$, dus niet diag.baar.
in $\mathbb{C}$: i en $-i$, de eigenruimten hebben dim >0
~~...~~ dus zijn allebei van dim 1, diag.baar.

Vb: 1
Argument: $3 = 1 + 2$
$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

4. $\det(A_a) = a - (2-a) = 2a - 2 = 2\cdot(a-1)$. 3

10

Geval 1: $a \neq 1$. Dan $\det(A) \neq 0$, dus unieke oplossing.

4 $\left(\begin{array}{cc|c} a & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & 2-a & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a \end{array}\right) \cdot \frac{1}{1-a} \rightsquigarrow$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ +2, dus: $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 + \frac{1}{2} = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$. +1

De unieke oplossing is $\frac{1}{2}\cdot(1,1)$. +1

Geval 2. $a=1$. We berekenen de oplossingsverzameling.

3

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ +1

x_2 vrij +1; $x_1 = 1 - x_2$, $\{(1,0) + \lambda\cdot(-1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. +1

Of wel: $\{(1-x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

- Delen door 0 : ~~[illegible]~~ −3 (per onderdeel $a=1$, $a\neq 1$)
- Rekenfout : −1
- door rekenfout $a=1$ missen : ~~6~~ −3

Vak:

Naam:

Datum:

Studierichting:

Docent:

Collegekaartnummer:

5. (a) De kolommen van $[f]_{E_2}^{E_3}$ zijn $f(e_1)$, $f(e_2)$ en $f(e_3)$,
5

dus $[f]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 3x2 matrix : -4.

(b) $[f]_B^C = [id_{\mathbb{R}^2}]_B^{E_2} \cdot [f]_{E_2}^{E_3} \cdot [id_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^C$ 3
10

$[id]_{E_3}^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad [id]_{E_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 2 deze moeten we inverteren.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot -1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) -2 \rightsquigarrow$

waarvan 1 voor idee "inverteren".

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

dus $[id]_B^{E_2} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 4 $\quad \left(\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ! \right)$

$[f]_B^C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$ uitrekenen: 1

$= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -15 \\ -3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

6. (a) WAAR, want stel $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ met $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0$,
4 dan $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0 \cdot v_n = 0$, dus (vanwege de onafhankelijkheid van $v_1, \dots, v_n$) voor alle i: $\lambda_i = 0$.

(b) ONWAAR, we weten dat $v_1, \dots, v_n$ onafhankelijk zijn (want
4 hun beelden onder f zijn onafhankelijk), maar het hoeven geen voortbrengers te zijn.
Voorbeeld: $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1$, $n = 1$, $v_1 = e_1$. Dan is $f(v_1)$ een basis van W, maar v_1 is geen basis van V.

(c) WAAR. $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) =$
4 $= \dim(U_1) + \dim(U_2)$.
En $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim((U_1 + U_2) + U_3) =$
$= \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_3) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_3) - \dim((U_1 + U_2) \cap U_3)$
$= \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3)$.
Dus $\dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) = \dim(U_1 + U_2 + U_3) \leq \dim(V)$ (deelruimte).

(d) WAAR: $\dim(V) = \dim(\ker f) + \overset{rk(f)}{\overset{\parallel}{\dim}}(f(V))$,
4
en $rk(f) \leq \dim(W)$, dus

Wat als: stel f injectief, dan $\dim(V) \leq \dim(W)$?

$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - rk(f) \geq \dim(V) - \dim(W) > 0$.
Dus $\ker(f) \neq \{0\}$, dus f niet injectief. Prop. 8.7: $f: V \to W$ inj $\Rightarrow$ $\dim V \leq \dim W$.

(e) WAAR
Laat $d = \dim(U)$, $v_1, \dots, v_d$ een basis van U, die we uitbreiden
4 tot een basis $v_1, \dots, v_n$ van V. Laat $w_1, \dots, w_e$ een basis van W zijn. Dan $d \geq e$. Definieer f door:

$f(v_i) = w_i$ als $i \leq e$
$\phantom{f(v_i) = {}} 0$ als $i > e$.

Dan $f(U) = L(f(v_1), \dots, f(v_d)) =$
$= L(w_1, \dots, w_e) = W$.