Tentamen Lineaire Algebra I (wiskunde)

Bas Edixhoven

19 januari 2017, 10:00–13:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.**
Controleer zoveel mogelijk je antwoorden.
Er zijn **6 opgaven**. Indicatieve normering: 10+15+20+10+15+20 =90. Succes!

1. Laat $a = (1, 2, -3)$ en $v = (3, 2, -7)$ in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bepaal $v_1 \in L(a)$ en $v_2 \in a^\perp$ met $v = v_1 + v_2$.

   (b) Geef de afstanden $d(v, L(a))$ en $d(v, a^\perp)$.

2. Laat $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de gereduceerde rijtrapvorm van A.

   (b) Geef een basis van $\ker(A)$.

3. Laat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis van de eigenruimte.

   (b) Geef een diagonale matrix D en een inverteerbare matrix P, beide in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, zodat $A = PDP^{-1}$.

   (c) Geef een voorbeeld van een $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ waarvan het karakteristieke polynoom $P_B(\lambda)$ splitst in lineaire factoren met reële coëfficiënten, maar die niet diagonaliseerbaar is.

   (d) Geef een voorbeeld van een C in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die niet diagonaliseerbaar is in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, maar wel in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$.

4. Laat, voor $a \in \mathbb{R}$, $A_a = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, en laat $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Bepaal voor elke $a \in \mathbb{R}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^2 : A_a \cdot x = b\}$.

5. Laat $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding zijn gegeven door $f(x,y,z) = (x+y-z, 2x-3z)$.

   (a) Laat E_3 de standaardbasis zijn van $\mathbb{R}^3$, en E_2 de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$. Geef $[f]_{E_2}^{E_3}$.

   (b) Laat $C = (v_1, v_2, v_3)$ de basis zijn van $\mathbb{R}^3$ met $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (0,-2,1)$ en $v_3 = (2,1,0)$. Laat $B = (w_1, w_2)$ de basis van $\mathbb{R}^2$ zijn met $w_1 = (2,-1)$ en $w_2 = (3,-1)$. Je hoeft niet te controleren dat C en B bases zijn. Bepaal $[f]_B^C$.

6. WAAR of ONWAAR? Geef een korte uitleg als je voor WAAR kiest, en een tegenvoorbeeld als je voor ONWAAR kiest. Vergeet niet eerst duidelijk je keuze te vermelden. Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken. Als je een tegenvoorbeeld geeft, dan moet je alle objecten daarin expliciet definiëren (het lichaam, de vectorruimte, de vectoren,...).

   (a) Laat $n \geq 2$, en $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementen van een vectorruimte V. Als $v_1, v_2, \ldots, v_n$ lineair onafhankelijk zijn, dan zijn ook $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ lineair onafhankelijk.

   (b) Als $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding is, $v_1, \ldots, v_n$ in V zodat $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ een basis zijn van W, dan zijn $v_1, \ldots, v_n$ een basis van V.

   (c) Als V een eindig-dimensionale vectorruimte is, en U_1, U_2 en U_3 zijn deelruimten van V met $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ en $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \{0\}$, dan geldt
   $\dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) \leq \dim(V)$.

   (d) Als $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding is met V en W eindig-dimensionaal, en $\dim(V) > \dim(W)$ dan is f niet injectief.

   (e) Als V een eindig-dimensionale vectorruimte is, en U en W zijn deelruimten van V met $\dim(W) \leq \dim(U)$, dan is er een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ met $f(U) = W$.