Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: LA 1 | Naam: Bas Edixhoven

Datum: 19 jan. 2017 | Studierichting:

Docent: Edixhoven | Collegekaartnummer:

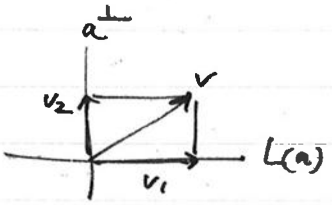
1. (a) 5

③ $v_1 = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a = \frac{28}{14} \cdot a = 2a = (2, 4, -6)$

② $v_2 = v - v_1 = (3, 2, -7) - (2, 4, -6) = (1, -2, -1)$

(Controle: $\langle v_2, a \rangle = \langle (1, -2, -1), (1, 2, -3) \rangle = 1 - 4 + 3 = 0$.)

(b) 5



$d(v, L(a)) = \|v_2\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$d(v, a^\perp) = \|v_1\| = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2 \cdot \sqrt{14}$.

-3: $d(v, L(a)) = \|v_1\|$

geen $\sqrt{}$: -2 $\quad \sqrt{|x_1| + |x_2|}$: -2 o.i.d.

rekenfouten : -1.

2. (a) 10

iedere rekenfout: −2

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot -1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} -3 \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) 5

rekenfouten (+/−) −1.

x_2 en x_4 zijn vrij. +1

$x_2 = 1$ en $x_4 = 0$ geeft: $(-2, 1, 0, 0) = v_1$ +1

$x_2 = 0$ en $x_4 = 1$ geeft: $(\cancel{-1}\, 0, +2, 1) = v_2$. +1

(−1, 0, 2, 1)

Basis ker A : (v_1, v_2) +2

- 0-Rij niet onderaan −2
- geen 0 boven 2e spil (niet gereduceerd) −3
- spillen niet op volgorde −2

Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: ____________ Naam: ____________

Datum: ____________ Studierichting: ____________

Docent: ____________ Collegekaartnummer: ____________

3. (a) $\mathrm{Tr}(A) = 3$, $\det(A) = 2$, $P_A(t) = \det(t \cdot Id - A) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$. 4

8

$\lambda_1 = +1$, $A - \lambda_1 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ker $(A - I)$ heeft basis $(1,1) = v_1$ 2

$\lambda_2 = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

basis ker$(A - 2I)$: $(1,2) = v_2$ 2

(b) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D = [f_A]_v^v$, met $v = (v_1, v_2)$.

4

Dus $A = [f_A]_E^E = [id]_E^v \cdot [f_A]_v^v \cdot [id]_v^E$, $P = [id]_e^v =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverse van P: -2

$\lambda_1 \Leftrightarrow v_2$
$\lambda_2 \Leftrightarrow v_1$: -2.

(c) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dan $P_B(t) = t^3$. $E_0(B) \neq \mathbb{R}^3$.

4

dim. 2: basis (e_1, e_3).

Vb: 1

argument: $3 = 1 + 2$ splitst, niet diag.baar.

(d) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rotatie over $90°$ in $\mathbb{R}^2$.

4

$P_C(t) = t^2 + 1$.

Eigenwaarden: ~~...~~ geen in $\mathbb{R}$, dus niet diag.baar.
in $\mathbb{C}$: i en $-i$, de eigenruimten hebben dim > 0
~~...~~ dus zijn allebei van dim 1, diag.baar.

Vb: 1

Argument: $3 = 1 + 2$
$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

4. $\det(A_a) = a - (2-a) = 2a - 2 = 2\cdot(a-1)$. 3

10

<u>Geval 1</u>: $a \neq 1$. Dan $\det(A) \neq 0$, dus unieke oplossing.

4

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & 2-a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-a} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a \end{array}\right) \cdot \frac{1}{1-a} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)^{+2}, \text{ dus: } \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_1 + \tfrac{1}{2} = 1, \quad x_1 = \tfrac{1}{2}.^{+1}$$

De unieke oplossing is $\frac{1}{2}\cdot(1,1)$. +1

<u>Geval 2</u>. $a=1$. We berekenen de oplossingsverzameling.

3

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^{+1}$$

x_2 vrij +1; $x_1 = 1 - x_2$, $\{(1,0) + \lambda\cdot(-1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. +1

Of wel: $\{(1-x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

- Delen door 0 : ~~Max~~ -3 (per onderdeel $a=1$, $a\neq 1$)
- Rekenfout : -1
- door rekenfout $a=1$ missen : -3

Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: ______ Naam: ______

Datum: ______ Studierichting: ______

Docent: ______ Collegekaartnummer: ______

---

5. (a) De kolommen van $[f]^{E_3}_{E_2}$ zijn $f(e_1)$, $f(e_2)$ en $f(e_3)$,
5

dus $[f]^{E_3}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 3x2 matrix : -4.

(b) $[f]^{C}_{B} = [id_{\mathbb{R}^2}]^{E_2}_{B} \cdot [f]^{E_3}_{E_2} \cdot [id_{\mathbb{R}^3}]^{C}_{E_3}$ 3
10

$[id]^{C}_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $[id]^{B}_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 2 deze moeten we inverteren.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot -1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) -2 \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

waarvan 1 voor idee "inverteren".

dus $[id]^{E_2}_{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 4 $\left(\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}!\right)$

$[f]^{C}_{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$ uitrekenen: 1

$= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -15 \\ -3 & -9 & 11 \end{pmatrix}.$

6. (a) WAAR, want stel $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ met $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0$,
4 dan $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0 \cdot v_n = 0$, dus (vanwege de onafhankelijkheid van $v_1, \ldots, v_n$) voor alle i: $\lambda_i = 0$.

(b) ONWAAR, we weten dat $v_1, \ldots, v_n$ onafhankelijk zijn (want
4 hun beelden onder f zijn onafhankelijk), maar het hoeven geen voortbrengers te zijn.
Voorbeeld: $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1$, $n = 1$, $v_1 = e_1$. Dan is $f(v_1)$ een basis van W, maar v_1 is geen basis van V.

(c) WAAR. $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) =$
4 $= \dim(U_1) + \dim(U_2)$.
En $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim((U_1 + U_2) + U_3) =$
$= \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_3) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_3) - \dim((U_1 + U_2) \cap U_3)$
$= \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3)$.
Dus $\dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) = \dim(U_1 + U_2 + U_3) \leq \dim(V)$ (deelruimte).

(d) WAAR: $\dim(V) = \dim(\ker f) + \underset{\text{rk}(f)}{\dim(f(V))}$,
4

Wat als: stel f injectief, dan $\dim(V) \leq \dim(W)$?

en $\text{rk}(f) \leq \dim(W)$, dus

$$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \text{rk}(f) \geq \dim(V) - \dim(W) > 0.$$

Dus $\ker(f) \neq \{0\}$, dus f niet injectief. Prop. 8.7: $f: V \to W$ inj $\Rightarrow$ $\dim V \leq \dim W$.

(e) WAAR
Laat $d = \dim(U)$, $v_1, \ldots, v_d$ een basis van U, die we uitbreiden tot een basis $v_1, \ldots, v_n$ van V. Laat $w_1, \ldots, w_e$ een
4 basis van W zijn. Dan $d \geq e$. Definieer f door:

$f(v_i) = w_i$ als $i \leq e$
$\ 0$ als $i > e$.

Dan $f(U) = L(f(v_1), \ldots, f(v_d)) = L(w_1, \ldots, w_e) = W$.