Uitwerkingen toets lineaire algebra I, oktober 2016

Door: Raymond van Bommel

Opgave 1. Laat $a = (2, -1, -1)$ en $v = (-2, 5, 3)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bepaal $v_1 \in L(a)$ en $v_2 \in a^\perp$ met $v = v_1 + v_2$, en controleer je antwoord.

Oplossing
De component van v in $L(a)$ kunnen we berekenen als

$$\begin{aligned} v_1 &:= \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a = \frac{2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 + (-1) \cdot 3}{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot a \\ &= \tfrac{-12}{6} \cdot a = -2 \cdot a = (-4, 2, 2). \end{aligned}$$

De component van v in $a^\perp$ is dan $v_2 := v - v_1 = (2, 3, 1)$.

Om het antwoord te controleren moeten we de volgende drie dingen controleren.

(1) Geldt $v = v_1 + v_2$? Dit komt neer op het controleren dat $(-4, 2, 2) + (2, 3, 1) = (-2, 5, 3)$. Het is een kwestie van narekenen dat dit inderdaad klopt.

(2) Geldt $v_1 \in L(a)$? Dat geldt inderdaad, want v_1 is per constructie een veelvoud van a, namelijk $v_1 = (-4, 2, 2) = 2 \cdot a$, dus $v_1 \in L(a)$.

(3) Geldt $v_2 \in a^\perp$? Dit is misschien niet direct duidelijk vanuit de constructie, maar we zien dat $\langle v_2, a\rangle = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$, dus er geldt inderdaad dat $v_2 \in a^\perp$.

(b) Geef de afstanden $d(v, L(a))$ en $d(v, a^\perp)$.

Oplossing
De afstand $d(v, L(a))$ is de lengte van v_2 uit onderdeel **(b)**. Dat komt dus neer op $d(v, L(a)) = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^1} = \sqrt{14}$. De afstand $d(v, a^\perp)$ is de lengte van v_1 uit onderdeel **(a)**. Dat is $d(v, a^\perp) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24}$.

Opgave 2. Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in het vlak zijn gegeven door de vergelijking $x + y - 3z = 0$. Laat $a = (1, 1, -3)$.

(a) Geef de matrix A die bij f hoort.

Oplossing
Het vlak H in kwestie is $a^\perp$: het vlak H bevat immers precies alle punten $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die voldoen aan $\langle v, a\rangle = 0$. De spiegeling f, in het dictaat ook wel s_H genoemd, in H wordt gegeven door

$$s_H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad v \mapsto s_H(v) := v - 2\frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a.$$

We berekenen nu

$$\begin{aligned} s_H((1,0,0)) &= (1,0,0) - 2 \cdot \tfrac{1}{11} \cdot a = \left(\tfrac{9}{11}, -\tfrac{2}{11}, \tfrac{6}{11}\right), \\ s_H((0,1,0)) &= (0,1,0) - 2 \cdot \tfrac{1}{11} \cdot a = \left(-\tfrac{2}{11}, \tfrac{9}{11}, \tfrac{6}{11}\right), \\ s_H((0,0,1)) &= (0,0,1) - 2 \cdot \tfrac{-3}{11} \cdot a = \left(\tfrac{6}{11}, \tfrac{6}{11}, -\tfrac{7}{11}\right). \end{aligned}$$

Dit zijn de kolommen van de matrix horend bij f. De matrix horend bij f is dus

$$A := \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{7}{11} \end{pmatrix}.$$

(b) Bereken $A \cdot a$ door dit product van matrix keer vector uit te werken.

Oplossing
We berekenen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{7}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ -\frac{2}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{9}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} \\ -\frac{7}{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{9}{11} + 1 \cdot (-\frac{2}{11}) - 3 \cdot \frac{6}{11} \\ 1 \cdot (-\frac{2}{11}) + 1 \cdot \frac{9}{11} - 3 \cdot \frac{6}{11} \\ 1 \cdot \frac{6}{11} + 1 \cdot \frac{6}{11} - 3 \cdot (-\frac{7}{11}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Had je $A \cdot a$ ook op een andere manier kunnen berekenen?

Oplossing
De matrix A hoort bij f. Dus we weten dat $A \cdot a = f(a)$. De vector a staat normaal op het vlak $a^\perp$ dat door de oorsprong gaat. De spiegeling van a in dit vlak is dan ook $-a$, dat wil zeggen dat $f(a) = -a$. Dus $A \cdot a = -a = (-1, -1, 3)$.

Opgave 3. Laat V en W vectorruimten zijn over een lichaam F, $f : V \to W$ een lineaire afbeelding met $\ker(f) = \{0\}$.

(a) Bewijs dat f injectief is.

Oplossing

Stel dat $v_1, v_2 \in V$ zodanig zijn dat $f(v_1) = f(v_2)$. Dan gaan we bewijzen dat $v_1 = v_2$ en daarmee dat f injectief is. Omdat f lineair is, weten we dat $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0$. In het bijzonder weten we dus dat $v_1 - v_2 \in \ker(f) = \{0\}$. Dus $v_1 - v_2 = 0$ en $v_1 = v_2$, waarmee we de injectiviteit van f hebben bewezen.

(b) Geef een voorbeeld van een lichaam F, vectorruimten V en W, en een niet-injectieve afbeelding $f : V \to W$ met $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Oplossing

Er wordt nu niet meer gevraagd dat de afbeelding f lineair is. Dat geeft een hoop mogelijkheden. We geven twee voorbeelden. Er zijn een hoop andere correcte voorbeelden die je hier had kunnen geven.

Voorbeeld 1. Bekijk $V = W = \mathbb{R}$ over $F = \mathbb{R}$. Beschouw nu de afbeelding $f : V \to W : x \mapsto x^2$. Het enige reële getal dat kwadraat 0 heeft is 0, m.a.w. $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Aan de andere kant worden de verschillende elementen $-1, 1 \in V$ door f allebei naar 1 gestuurd. De functie f is dus niet injectief.

Voorbeeld 2. Kies $F = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, zoals in Example B.6 op pagina 206 in het dictaat. Neem nu $V = F^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ en $W = F$. Beschouw de afbeelding:

$$f : V \to W : \quad (0,0) \mapsto 0, \quad (0,1) \mapsto 1, \quad (1,0) \mapsto 1, \quad (1,1) \mapsto 1.$$

Dan zien we direct dat $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Maar f is niet injectief, want de verschillende elementen $(0,1), (1,0) \in V$ worden allebei naar $1 \in W$ gestuurd.

Opgave 4. Is het waar dat voor alle lichamen F en vectorruimten V en deelruimten V_1, V_2 en V_3 geldt dat $V_1 \cap (V_2 + V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Motivatie[1]
Het is niet zo lastig om de inclusie $V_1 \cap (V_2 + V_3) \supset (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$ te bewijzen. Elk element aan de rechterkant is van de vorm $v_2 + v_3$ met $v_2 \in V_1 \cap V_2$ en $v_3 \in V_1 \cap V_3$. In het bijzonder zien we dat $v_2, v_3 \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$, aangezien $V_1 \cap V_2$ en $V_1 \cap V_3$ bevat zijn in $V_1 \cap (V_2 + V_3)$. Aangezien $V_1 \cap (V_2 + V_3)$ een vectorruimte is en gesloten is onder optelling, zien we dat $v_2 + v_3 \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$.

Als je nu de andere inclusie probeert te bewijzen, zie je dat je op een probleem stuit. Aan de linkerkant heb je elementen van de vorm $v_2 + v_3$ met $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_3$ en $v_2 + v_3 \in V_1$. Er is echter geen reden om aan te nemen dat de elementen v_2 en v_3 elk afzonderlijk in V_1 zitten. Deze waarneming zou je op het idee kunnen zetten om een voorbeeld te proberen te construeren waarvoor $V_2 + V_3$ bijvoorbeeld heel $V_1 \neq \{0\}$ bevat, maar $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = \{0\}$.

Oplossing
De uitspraak is niet waar. Ook hier zijn er meerdere tegenvoorbeelden die je had kunnen geven. We bekijken er twee.

Voorbeeld 1. Neem $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ en $V_1 = L((1,1)), V_2 = L((1,0))$ en $V_3 = L((0,1))$. De deelruimte $V_2 + V_3$ bestaat uit alle elementen van de vorm $\lambda \cdot (1,0) + \mu \cdot (0,1) = (\lambda, \mu)$, met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De deelruimte bestaat dus uit alle elementen van $\mathbb{R}^2$, i.e. $V_2 + V_3 = \mathbb{R}^2$. We zien dat $V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap \mathbb{R}^2 = V_1$.

Nu bekijken we $V_1 \cap V_2$. De deelruimte V_1 bestaat uit alle scalaire veelvouden van $(1,1)$, i.e. de vectoren van de vorm (λ, λ) met $\lambda \in \mathbb{R}$. De deelruimte V_2 bestaat uit alle scalaire veelvouden van $(1,0)$, i.e. de vectoren van de vorm $(\mu, 0)$ met $\mu \in \mathbb{R}$. We zien dat de enige vector die zowel van de eerste als van de tweede vorm is de vector $(0,0)$ is. Dus $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Op dezelfde manier tonen we aan dat $V_1 \cap V_3 = \{0\}$. De som $(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) = \{0\} + \{0\}$ bestaat uit elementen van de vorm $v + w$ met $v \in V_1 \cap V_2$ en $w \in V_1 \cap V_3$. Omdat 0 het enige element van beide verzamelingen is, zien we dat $(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) = \{0\}$.

We concluderen nu dat $V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \neq 0 = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$, aangezien de linker deelruimte het element $(1,1) \in V$ bevat dat niet in de rechter deelruimte zit.

Voorbeeld 2. We kunnen ook hetzelfde doen als in voorbeeld 1, maar dan over $F = \mathbb{F}_2$ (zie Example B.6, p. 206 in het dictaat). We nemen dus

$$V = F^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}, \quad V_1 = L((1,1)) = \{(0,0), (1,1)\}$$
$$V_2 = L((1,0)) = \{(0,0), (1,0)\} \quad \text{en} \quad V_3 = L((0,1)) = \{(0,0), (0,1)\}.$$

Het is niet zo moeilijk om aan de hand van een paar optellingen na te gaan dat $V_2 + V_3 = V$. We zien immers dat $V_2 + V_3$ bestaat uit de vier elementen $(0,0) + (0,0) = (0,0), (0,0) + (0,1) = (0,1), (1,0) + (0,0) = (1,0)$ en $(1,0) + (0,1) = (1,1)$. We vinden dan weer dat $V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1$. Op dezelfde manier zien we ook meteen dat $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ en $V_1 \cap V_3 = \{0\}$ en net als voorheen zien we dus dat $(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) = \{0\}$.

Precies als in het vorige voorbeeld concluderen we nu dat $V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \neq \{0\} = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$ door op te merken dat $(1,1) \in V$ een element is van de linker deelruimte en niet van de rechter deelruimte.

[1] *Deze motivatie is strikt gezien niet nodig voor een volledige correcte uitwerking. Hij staat in dit document om uit te leggen hoe je op het antwoord had kunnen komen. Als je zelf ideeën hebt bedacht in deze richting, dan was het zeker de moeite waard geweest om ze op te schrijven en in te leveren. Je weet maar nooit waar je punten voor kunt krijgen.*