Uitwerking toets Lineaire algebra I

Bas Edixhoven

23 oktober 2017, 11:00–13:00

Normering: Opg. 1: 20=7+6+7, Opg 2: 25=5+10+10, Opg. 3: 25=5+10+10, Opg. 4: 20=5+5+5+5.

1. Laat $a = (1, 2, 3)$ en $v = (-3, 5, 7)$ in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bepaal de projectie $\pi_{L(a)}(v)$ van v op de lijn $L(a)$. We passen de gegeven formule $\pi_{L(a)}(v) = (\langle v, a\rangle/\langle a, a\rangle)\cdot a$ toe. We berekenen $\langle v, a\rangle = -3 + 10 + 21 = 28$, $\langle a, a\rangle = 1 + 4 + 9 = 14$, en $\pi_{L(a)}(v) = 2\cdot a = 2\cdot(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$.

   (b) Bepaal de projectie $\pi_{a^\perp}(v)$ van v op het vlak $a^\perp$.

   Er geldt $\pi_{a^\perp}(v) = v - \pi_{L(a)}(v) = (-3, 5, 7) - (2, 4, 6) = (-5, 1, 1)$. We controleren dat dit inderdaad in $a^\perp$ zit: $\langle(-5, 1, 1),(1, 2, 3)\rangle = -5 + 2 + 3 = 0$.

   (c) Bepaal de reflectie $s_{a^\perp}(v)$ van v in $a^\perp$.

   Er geldt dat $s_{a^\perp}(v) = v - 2\cdot\pi_{L(a)}(v) = (-3, 5, 7) - 2\cdot(2, 4, 6) = (-7, -3, -5)$.

2. Laat $a = (1, 1, 1)$ en $b = (1, 0, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bewijs dat $a^\perp \cap L(b) = \{0\}$.

   Om te beginnen zijn $a^\perp$ en $L(b)$ deelruimten, dus ook hun doorsnede, dus $0 \in a^\perp \cap L(b)$. Stel nu dat $x \in a^\perp \cap L(b)$. Dan $x \in L(b)$, dus is er een $\lambda \in \mathbb{R}$ met $x = \lambda\cdot b$. En ook $x \in a^\perp$, dus $0 = \langle x, a\rangle = \langle \lambda\cdot b, a\rangle = \lambda\cdot\langle b, a\rangle = \lambda\cdot 1 = \lambda$. Dus $x = 0\cdot b = 0$.

   (b) Geef v_1 en v_2 in $\mathbb{R}^3$ zodat $a^\perp = L(v_1, v_2)$.

   Het is makkelijk om v_1 en v_2 in $a^\perp$ te vinden, maar we moeten ook laten zien dat ze $a^\perp$ voortbrengen. Daarom starten we met een willekeurig element $x \in a^\perp$. We schrijven $x = (x_1, x_2, x_3)$, en dan weten we dat $0 = \langle x, a\rangle = x_1 + x_2 + x_3$. Dus $x_3 = -x_1 - x_2$, en $x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = x_1\cdot(1, 0, -1) + x_2\cdot(0, 1, -1)$. Laat nu $v_1 = (1, 0, -1)$ en $v_2 = (0, 1, -1)$. Dan hebben we $a^\perp \subseteq L(v_1, v_2)$. Aan de andere kant zijn v_1 en v_2 in $a^\perp$, want de sommen van hun coördinaten zijn 0, dus $L(v_1, v_2) \subseteq a^\perp$.

(c) Bewijs dat $a^\perp + L(b) = \mathbb{R}^3$.

Het is voldoende te bewijzen dat de standaardvoortbrengers e_1, e_2 en e_3 van $\mathbb{R}^3$ in $a^\perp + L(b)$ zitten. Wel, $e_1 = b$, en $e_2 = (-1,1,0) + b$, en $e_3 = (-1,0,1) + b$.

3. Laat V een $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn, en laat S en T deelverzamelingen van V zijn.

(a) Geef een definitie van $L(S)$, de deelruimte voortgebracht door S.

$L(S)$ is de verzameling van lineaire combinaties van elementen van S: sommen $\sum_{s\in S} \lambda_s{\cdot}s$, met de $\lambda_s \in \mathbb{R}$ bijna allemaal 0.

(b) Bewijs dat $L(S) + L(T) \subseteq L(S \cup T)$.

Omdat S en T deelverzamelingen van $L(S \cup T)$ zijn, zijn $L(S)$ en $L(T)$ deelruimten van $L(S \cup T)$ (we gebruiken hier Lemma 3.29 uit het dictaat, maar dat hoef je niet te zeggen). Dus $L(S) \cup L(T) \subseteq L(S \cup T)$. Omdat per definitie $L(S) + L(T) = L(L(S) \cup L(T))$, geeft hetzelfde lemma de gevraagde inclusie.

(c) Bewijs dat $L(S \cup T) \subseteq L(S) + L(T)$.

$L(S) + L(T)$ is een deelruimte die $L(S)$ en $L(T)$ bevat, en dus S en T bevat, en dus ook $S \cup T$. Lemma 3.29 geeft dan dat $L(S \cup T) \subseteq L(S) + L(T)$.

4. Laat V de $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn van alle differentieerbare functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Welke van de volgende afbeeldingen zijn lineair?

(a) De afbeelding $\phi\colon V \to \mathbb{R}^2$, $f \mapsto (f(1) - 2f(2), f'(3))$.

Ja. Laat f en g in V, en laat $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan gelden

$$\begin{aligned}
\phi(f+g) &= ((f+g)(1) - 2(f+g)(2), (f+g)'(3)) \\
&= (f(1) + g(1) - 2(f(2) + g(2)), f'(3) + g'(3)) \\
&= (f(1) - 2f(2), f'(3)) + (g(1) - 2g(2), g'(3)) \\
&= \phi(f) + \phi(g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda{\cdot}f) &= ((\lambda{\cdot}f)(1) - 2(\lambda{\cdot}f)(2), (\lambda{\cdot}f)'(3)) \\
&= (\lambda{\cdot}f(1) - 2\lambda{\cdot}f(2), \lambda{\cdot}f'(3)) \\
&= \lambda{\cdot}(f(1) - 2f(2), f'(3)) = \lambda{\cdot}\phi(f).
\end{aligned}$$

(b) De afbeelding $\phi\colon V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)f(2)$. Nee. Want neem bijvoorbeeld f de constante functie 1, en $\lambda = 2$. Dan geldt $\phi(f) = f(1)f(2) = 1{\cdot}1 = 1$, en ook $\phi(\lambda f) = ((\lambda f)(1)){\cdot}((\lambda f)(2)) = \lambda^2 = 4 \neq 2 = \lambda\phi(f)$.

(c) De afbeelding $\phi\colon \mathbb{R} \to V$, $x \mapsto \phi_x$, met $\phi_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x^2 y$.

Nee. Want bijvoorbeeld voor $x = 1$ en $y = 1$ geldt $\phi_{2x}(y) = (2x)^2 y = 4$ en $2\phi_x(y) = 2{\cdot}1$, dus $\phi_{2x} \neq 2\phi_x$.

(d) De afbeelding $\phi\colon \mathbb{R} \to V$, $x \mapsto \phi_x$, met $\phi_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto xy^2$.

Ja. Voor x en x' in $\mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ gelden, voor alle y in $\mathbb{R}$:

$$\phi_{x+x'}(y) = (x + x')y^2 = xy^2 + x'y^2 = \phi_x(y) + \phi_{x'}(y) = (\phi_x + \phi_{x'})(y),$$

$$\phi_{\lambda x}(y) = (\lambda x)y^2 = \lambda(xy^2) = \lambda\phi_x(y) = (\lambda\phi_x)(y),$$

dus $\phi_{x+x'} = \phi_x + \phi_{x'}$ en $\phi_{\lambda x} = \lambda\phi_x$.