Uitwerkingen werkcollege 13.

10.4.1 (1) -19, (2) 1, (3) 0, (4) 0.

10.4.2 Laat $B = (v_1, \ldots, v_n)$ een basis zijn van V, en laat, voor alle i in $\{1, \ldots, n\}$, $w_i := \phi(v_i)$. Dan is $C := (w_1, \ldots, w_n)$ een basis van W, want ϕ is een isomorfisme. Dan geldt:

$$[f']^C_C = [\phi]^B_C \cdot [f]^B_B \cdot [\phi^{-1}]^C_B = I_n \cdot [f]^B_B \cdot I_n = [f]^B_B\,.$$

Dus er geldt:

$$\det(f') = \det([f']^C_C) = \det([f]^B_B) = \det(f)\,.$$

10.4.4 (1) Voor iedere i hebben we $M_n \cdot e_i = \sum_{j \neq i} e_j$, want de i-de kolom van M_n heeft overal een 1 behalve op de i-de coördinaat. Dus voor $i \neq j$ geldt dat $M_n(e_i - e_j) = \sum_{k \neq i} e_k - \sum_{l \neq j} e_j = e_j - e_i$. Hieruit volgt het gevraagde meteen.

(2) $M_n(e_1 + \cdots + e_n) = \sum_i \sum_{j \neq i} e_j = (n-1) \sum_k e_k$, want iedere e_k komt $n-1$ maal voor.

(3) $(v_2, \ldots, v_n)$ is de basis van $v_1^\perp$ die we vinden door de vergelijking $\langle x, v_1 \rangle = 0$ op te lossen.

(4) Dit volgt uit (1) en (2).

(5) We berekenen $\det(f)$ met behulp van de basis B. De matrix van f t.o.v. B is diagonaal, en de determinant is het product van de coëfficiënten op de diagonaal.

10.5.1 (zonder (2))

(1) The determinant of C_a is $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2)$, so for $a \notin \{-2, 3\}$, we have $\det C_a \neq 0$, so C_a has rank 3. For $a \in \{-2, 3\}$, the rank of C_a is easily computed to be 2.

(3) If C_a is invertible, then the equation $C_A x = v_b$ has a unique solution, so if there is more than one solution, then we have $a = -2$ or $a = 3$. for $a = -2$, then extended matrix $(C_{-2}|v_b)$ is row equivalent with

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right).$$

This shows that the system is consistent if and only if $b = 4$, so for $a = -2$ we only get the pair $(a, b) = (-2, 4)$ (and since $\ker C_{-2}$ is infinite, we do indeed get infinitely many solutions). For $a = 3$, the extended matrix $(C_3|v_b)$ is row equivalent with

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & b+2 \\ 0 & -3 & 7 & 3b+4 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right).$$

so the corresponding system is consistent if and only if $b = -1$, in which case we do indeed have infinitely many solutions.

(4) We have to look at the pair $(a,b) = (-2,4)$ and as we have seen the extended matrix $(C_{-1}|v_4)$ is row equivalent with

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

The solution set is therefore

$$\{(3,-3,1) + \lambda(2,-1,1) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

11.1.2 For every $\lambda \in \mathbb{R}$, the function g given by $g(x) = e^{\lambda x}$ for all $x \in \mathbb{R}$ satisfies $(Dg)(x) = g'(x) = \lambda g(x)$, so $Dg = \lambda g$, so g is an eigenvector for eigenvalue λ.

11.1.3 Voor $\lambda \in \mathbb{R}$ hebben we

$$\det(A - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda+3)(\lambda-1).$$

De eigenwaarden van A zijn dus $\lambda_1 = -3$ en $\lambda_2 = 1$. Een basis van $E_{-3}(A)$ is $(1,2)$. Een basis van $E_1(A)$ is $(1,1)$. Om rekenfouten te vermijden is het een goede zaak om te controleren dat dit inderdaad eigenvectoren met de geclaimde eigenwaarden zijn.

We bekijken nu de tweede matrix. Hiervan zien we meteen dat $(0,0,1)$ een eigenvector is met eigenwaarde -3. Voor alle λ in $\mathbb{R}$ geldt

$$\det(A - \lambda \cdot I_3) = -(\lambda+3)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

De eigenwaarden zijn dus zijn -3, 1 en 2, en de eigenruimten zijn 1-dimensionaal, met bases respectievelijk $(0,0,1)$, $(1,-1,0)$ en $(2,-1,0)$.

11.1.4 Laat $\lambda \in F$. Laat $v \in V$. Dan zijn equivalent:

(1) $v \in E_\lambda(f)$,
(2) $f(v) = \lambda \cdot v$ (vanwege de definitie van $E_\lambda(f)$),
(3) $\phi(f(v)) = \phi(\lambda \cdot v)$ (omdat ϕ injectief is),
(4) $g(\phi(v)) = \lambda \cdot \phi(v)$ (links omdat $g \circ \phi = \phi \circ f$, rechts omdat ϕ lineair is),
(5) $\phi(v) \in E_\lambda(g)$ (definitie van $E_\lambda(g)$).

Dus de beperking van ϕ tot $E_\lambda(f)$ heeft beeld $E_\lambda(g)$ en is dus een bijectieve lineaire afbeelding van $E_\lambda(f)$ naar $E_\lambda(g)$.