

Uitwerkingen werkcollege 6.

4.4.1

4.1.4.(3) $n = 3$, $W = \mathbb{C}^4$, $C = ((1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 2), (0, -3, -1, 1))$.

4.1.4.(4) $n =$, $W = V$, $C = (v_1, v_2, v_3)$.

4.1.7 $n = 2$, $W = \mathbb{R}^2$, $C = ((\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta))$.

4.1.8 $n = 2$, $W = \mathbb{R}^2$, $C = ((0, -1), (-1, 0))$.

4.1.10 $n = 2$, $W = \mathbb{R}^2$, $C = ((\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}))$.

4.1.11 $n = 2$, $W = \mathbb{R}^2$, $C = ((-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}), (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}))$.

4.4.2 (1) We take $m = n$, $W = F$, and $C = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in F^n$, with the 1 on the j -th position.

(2) The same: $a = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in F^n$, with the 1 on the j -th position!

5.3.1

$$(1) \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5.4.2 $m = 3$ and $n = 4$ and

$$w_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$5.4.3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$5.4.4 (1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

5.5.4 For the first part see Exercise 5.4.1 (the case of Exercise 4.1.7). If $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is rotation around 0 over an angle β , then for all $v \in \mathbb{R}^2$ we have $\sigma(v) = Bv$ for

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

The composition $\rho \circ \sigma$ is rotation around 0 over $\alpha + \beta$, so on one hand this is given by multiplication with

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

On the other hand it is given by multiplication with

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comparing the entries of the two equal matrices C and AB , we find the identities given in the exercise.

5.5.10 Je kunt bijvoorbeeld nemen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dan is AB de 1 bij 1 identiteitsmatrix. Dat A niet inverteerbaar is is omdat $f_A: F^2 \rightarrow F$ niet injectief is ($f_A(e_2) = 0$), en B is niet inverteerbaar omdat $f_B: F \rightarrow F^2$ niet surjectief is (e_2 zit niet in het beeld, want het beeld is $L(e_1)$).

5.5.12 De afbeelding $r: (F^n)^m \rightarrow \text{Mat}(m \times n, F)$ stuurt een m -tupel (v_1, \dots, v_m) van elementen van F^n naar de matrix met rijen v_1, \dots, v_m , d.w.z. de matrix A met $A_{i,j} = v_{i,j}$, de j -de coördinaat van v_i .

De afbeelding $k: (F^m)^n \rightarrow \text{Mat}(m \times n, F)$ stuurt een n -tupel (w_1, \dots, w_n) van elementen van F^m naar de matrix met kolommen w_1, \dots, w_n , d.w.z. de matrix A met $A_{i,j} = w_{j,i}$, de i -de coördinaat van w_j .

De afbeelding $l: \text{Mat}(m \times n, F) \rightarrow \text{Hom}(F^n, F^m)$ stuurt een matrix A naar de lineaire afbeelding f_A bij A , dus voor $x \in F^n$ geldt dan $f_A(x) = A \cdot x$.

De afbeelding $l \circ r$ stuurt dan een m -tupel (v_1, \dots, v_m) van elementen van F^n naar de lineaire afbeelding $F^n \rightarrow F^m$ gegeven door $x \mapsto (\langle x, v_1 \rangle, \dots, \langle x, v_m \rangle)$.

De afbeelding $l \circ c$ stuurt dan een n -tupel $w = (w_1, \dots, w_n)$ van elementen van F^m naar de lineaire afbeelding $\phi_w: F^n \rightarrow F^m$ gegeven door $x \mapsto \sum_j x_j w_j$.

De afbeeldingen r , k en l zijn lineair en bijectief, dus isomorfismen, en dus ook de samenstellingen $l \circ r$ en $l \circ k$.

Het diagram is commutatief per constructie.