Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: lin. alg. 1 wiskunde
Naam: Bas Edixhoven
Datum: 11 maart 2019
Studierichting:
Docent: Edixhoven
Collegekaartnummer:

---

1 (a) $\pi_a(v) = \frac{\langle a, v\rangle}{\langle a, a\rangle}\cdot a = \frac{-4-2-2-2}{1+1+4+4}\cdot a = \frac{-10}{10}\cdot a = -a.$

Dus $\pi_{a^\perp}(v) = v - \pi_a(v) = v-(-a) = v+a = (-3,-1,1,1).$

(controle: $\langle(-3,-1,1,1),(1,1,2,2)\rangle = -3-1+2+2=0.$)

5

(b) $\pi_{a^\perp}(e_1) = e_1 - \frac{1}{10}\cdot a = (1,0,0,0) - \frac{1}{10}\cdot(1,1,2,2) = \frac{1}{10}\cdot(9,-1,-2,-2),$

5 $\pi_{a^\perp}(e_2) = e_2 - \frac{1}{10}\cdot a = (0,1,0,0) - \frac{1}{10}\cdot(1,1,2,2) = \frac{1}{10}\cdot(-1,9,-2,-2),$

$\pi_{a^\perp}(e_3) = e_3 - \frac{2}{10}\cdot a = (0,0,1,0) - \frac{2}{10}(1,1,2,2) = \frac{1}{10}\cdot(-2,-2,6,-4),$

$\pi_{a^\perp}(e_4) = e_4 - \frac{2}{10}\cdot a = (0,0,0,1) - \frac{2}{10}\cdot(1,1,2,2) = \frac{1}{10}\cdot(-2,-2,-4,6).$

Dus $$[\pi_{a^\perp}]^E_E = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 9 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(c) $\pi_{a^\perp}$ is ~~een~~ de ~~spiegeling~~ projectie ~~in~~ op $a^\perp$, dus $\pi_{a^\perp}(a) = \cancel{2}a$, (1) eigenw. ~~-1~~ 0, en voor alle $x \in a^\perp$ geldt $\pi_{a^\perp}(x) = x$, (1) eigenw. 1. Omdat $a^\perp + \mathbb{R}\cdot a = \mathbb{R}^4$, zijn er geen andere eigenwaarden.

5

Basis van $\mathbb{R}\cdot a$: a (1)

Basis van $a^\perp$: $(1\ 1\ 2\ 2)$ is in se. rijtrapvorm, dus basis van hem op standaard manier (x_2, x_3 en x_4 "vrije variabelen"): $(-2,0,0,1)$, $(-2,0,1,0)$, $(-1,1,0,0)$. (2)

5

2 (a) We brengen de matrix met rijen v_1, v_2, v_3 in gereduceerde rijtrapvorm (d.m.v. rij operaties, die de rijruimte niet veranderen):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =: B$$

Dus $d = 3$, $w_1 = (1,0,0,2)$, $w_2 = (0,1,0,3)$, $w_3 = (0,0,1,-1)$.

5

(b) $U^\perp = \ker B$. Er is 1 kolom zonder spil, de 4e, dus x_4 is de enige vrije variabele. Basis $U^\perp$: $(-2,-3,1,1)$.

5

(c) We nemen $n = 1$ en $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, want dan geldt: $\ker A = (U^\perp)^\perp = U$.

ontw. naar 1e rij

Wa'el

3(a) $P_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -1 & t-4 & 1 \\ -2 & -2 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)\cdot\big((t-4)\cdot(t-1) - (-2)\cdot 1\big) =$

$= (t-1)(t^2-5t+4+2) = (t-1)(t^2-5t+6) =$

4 $= (t-1)\cdot(t-2)\cdot(t-3)$.

De eigenw. zijn 1, 2, en 3, met algebr. multipl. 1, dus de eigenruimten hebben dimensie 1.

2 $E_1(A) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

basis: $v_1 = (-1, 1, 2)$. Controle: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ v.

2 $E_2(A)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10

basis: $v_2 = (0, 1, 2)$. (en inderdaad e.w. 2 onder A).

2 $E_3(A)$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

basis $v_3 = (0, 1, 1)$ (check gedaan).

(b) Laat B de basis v_1, v_2, v_3 zijn. Dan geldt:

5 $A = [f_A]^E_E = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^B_E \cdot [f_A]^B_B \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B$.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. 3 $\det(A_t) = t\cdot(t+1) - 6 = t^2 + t - 6 = (t+3)\cdot(t-2)$.

4 Stel $t \notin \{-3, 2\}$. Dan is er een unieke ① oplossing (want dan is A_t inverteerbaar). We berekenen die opl. met vegen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & 3 & 1 \\ 2 & t+1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t+1 & 1 \\ 2t & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-t} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t+1 & 1 \\ 0 & 6-t^2-t & 2-t \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t+1 & 1 \\ 0 & t^2+t-6 & t-2 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{t-2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t+1 & 1 \\ 0 & t+3 & 1 \end{array}\right) ②$$

Dus $x_2 = \frac{1}{t+3}$ en $x_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{t+1}{t+3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cancel{t}+3 - \cancel{t} - 1}{t+3}\right) = \frac{1}{t+3}$.

Oplossing: $\frac{1}{t+3}\cdot(1,1)$. ①

4 Stel nu $t = -3$. Dan $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$ ② Spil achter de streep: strijdig, geen oplossing. ②

4 Stel nu $t = 2$. Dan $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ②

Niet strijdig. Particuliere opl: $(-1,1)$.
Opl'n homogene stelsel: basis $(-3, 2)$. ②
Dus opl. verz: $\{(-1,1) + \lambda\cdot(-3,2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
$(\frac{1}{2}, 0)$

Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak:
Naam: Bas Edixhoven.

Datum:
Studierichting:

Docent:
Collegekaartnummer:

Rosa

5 (a) $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $D(x^3) = 3x^2$.

3 ~~8~~ Dus $[D]^E_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $[D]^B_C = [id]^E_C \cdot [D]^E_E \cdot [D]^B_E$.

2

(c) Ik neem $B = b_1, b_2, b_3, b_4$ met $b_4 = e_1 = 1$, $b_3 = e_2 = x$, $b_2 = e_3 = x^2$, $b_1 = e_4 = x^3$.

5 Dan $D(b_1) = 3x^2 = 3b_2$, $D(b_2) = 2x = 2b_3$, $D(b_3) = 1 = b_4$ en $D(b_4) = 0$. Dat geeft de gevraagde matrix

(d) Geïnspireerd door (c) neem ik B zoals daar, en $C = c_1, c_2, c_3, c_4$ met $c_1 = D(b_1) = 3x^2$, $c_2 = D(b_2) = 2x$, $c_3 = D(b_3) = 1$,

5 en $c_4 = x^3$ want ~~ker~~ C moet wel een basis zijn.

Bas.

6 (a) We weten dat $U+W$ een deelr. is van V, dus $\dim(U+W) \leq \dim V = 6$.

5 Ook is U een deelr. van $U+W$, dus ~~dus~~ $3 = \dim(U) \leq \dim(U+W)$.

Ook: $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Omdat $U \cap W$ een deelr. is van W geldt $\dim(U \cap W) \leq 2$.

We zien: $3 \leq \dim(U+W) \leq 5$. 2

Vb. met 3: $V = \mathbb{R}^6$, st. basis $e_1, \ldots, e_6$, nu moet $U+W=U$, dus $W \subset U$, we nemen $U = L(e_1, e_2, e_3)$ en $W = L(e_1, e_2)$. 1

Vb. met 4: $U = L(e_1, e_2, e_3)$, $W = L(e_3, e_4)$. 1

Vb. met 5: $U = L(e_1, e_2, e_3)$, $W = L(e_4, e_5)$. 1

(b) Merk op: het is niet gegeven dat U en W complementair zijn.

5 Laat d_V, d_U en d_W de dimensies van V, U en W zijn.

Laat $w_1, \ldots, w_{d_W}$ een basis van W zijn, en $w_1, \ldots, w_{d_V}$ een uitbreiding daarvan tot een basis van V.

Laat $u_1, \ldots, u_{d_U}$ een basis van U zijn, en $u_1, \ldots, u_{d_V}$ een uitbreiding daarvan tot een basis van V. We weten $d_U + d_W = d_V$.

Dan definiëren we $f: V \to V$ door:

$$f(w_i) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \leq d_W \\ u_{i-d_W} & \text{als } i > d_W \end{cases}$$

Dan geldt: $\ker(f) = W$
$\operatorname{im}(f) = U$.

(c) We nemen $V = \mathbb{C}^3$, $f = f_A$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5 Dan $P_A(t) = (t-1)^2 \cdot (t-2)$, $\dim E_1(f) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

Meetk. multipl. < alg. mult., dus deze f is niet diagonaliseerbaar.