Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: Lineaire Algebra 1 | Naam: Bas Edixhoven
Datum: 2019/01/16 | Studierichting:
Docent: Bas Edixhoven | Collegekaartnummer:

---

1 (a) $p_a(x) = \frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a$, $p_{a^\perp}(x) = x - p_a(x)$.

3

(b) Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt dat equivalent zijn:
1: $x+\lambda a \in H$, 2: $\langle x+\lambda a, a\rangle = b$, 3: $\langle x,a\rangle + \lambda\langle a,a\rangle = b$

6

4: $\lambda = \frac{b-\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}$. Dus er is een unieke $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat $x+\lambda a \in H$ en die is zoals in 4.

(c) We passen (b) toe met $n=3$, $a=(1,-1,1)$, $b=1$ en $x=0$.

6

Dan $d(x,H) = \|\lambda a\|$ met λ als in (b)(4). We gebruiken hier dat a een normaal is op H.
We vullen in: $\|\lambda a\| = |\lambda|\cdot\|a\| = \left|\frac{b}{\langle a,a\rangle}\right|\cdot\langle a,a\rangle^{1/2} =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2(a) We zetten de v_i als rijen in een matrix en doen dan rijoperaties naar gereduceerde rijtrapvorm.

5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -27 \\ 0 & 2 & 2 & 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot -\frac{1}{3} \\ \cdot \frac{1}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ -1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ 2

Dus $d = 2$, $w_1 = (1, 0, 2, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1, 9)$

1 2 4

(b) $U^\perp = \ker(A) = \ker(B)$. 2 spillen, kolommen 1 en 2, x_3 en x_4 zijn vrije variabelen.

5

We krijgen een basis door $x_3 = 0, x_4 = 1$: $(0, -9, 0, 1) = u_1$

$x_3 = 1, x_4 = 0$: $(-2, -1, 1, 0) = u_2$.

(Inderdaad, controle: $\langle u_i, v_j \rangle = 0$ voor alle i, j.)

(c) $U = (U^\perp)^\perp$, dus $U = \ker \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2\times 4, \mathbb{R})$

5

$\nwarrow A$. $n = 2$.

3 (a). 10

$$\det(\lambda \cdot Id - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$ ontw. naar 2e kolom

4

$$= (\lambda-2)\cdot \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\cdot\left((\lambda-3)(\lambda+3) - (-2)\cdot 4\right)$$

$$= (\lambda-2)\cdot(\lambda^2-9+8) = (\lambda-2)\cdot(\lambda^2-1) = (\lambda-2)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+1).$$

Eigenwaarden: 2, 1, −1.

$$E_2(A) = \ker(A-2\cdot Id), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 Basis v.d. kern: $v_1 := (0,1,0)$.

$$E_1(A): A - Id = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2},\ -1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ x_3 vrij. $(2,0,1)$

2 Basis kern: $v_2 := (2,0,1)$.

$$E_{-1}(A): A + Id = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{4},\ \cdot\frac{1}{3},\ -2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 x_3 vrij. Basis kern: $v_3 := (1,0,1)$.

(b) Laat B de basis v_1, v_2, v_3 zijn, met eigenw. 2, 1, −1.

5 Laat E de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ zijn. $A\cdot : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A\cdot x$, $= f_A$

Dan $[A\cdot]^E_E = \underbrace{[id]^B_E}_{P} \cdot \underbrace{[A\cdot]^B_B}_{D} [id]^E_B$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $A_t \cdot b = \begin{pmatrix} 3-t & -4 \\ 2 & -3-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-t \\ -1-t \end{pmatrix} = (-1-t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1-t).b.$

3 Als A_t inverteerbaar is, dan is er precies 1 oplossing.
A_t inv.baar is equiv. met $\det(A_t) \neq 0$.
$\det(A_t) = (3-t)\cdot(-3-t) + 2\cdot 4 = -(3-t)\cdot(3+t) + 8 =$
$= -(9-t^2) + 8 = t^2 - 1$ (hé: ook zo in vg. 3!)
Dus: A_t inv.baar $\Leftrightarrow$ $t \notin \{1,-1\}$.

4 Voor $t \notin \{1,-1\}$: $\exists!$ oplossing, en die is $\frac{1}{-1-t} \cdot b = \frac{-1}{1+t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Voor $t = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Particuliere oplossing: $(\frac{1}{2}, 0)$.

4 ~~3~~ basis homogene opl'n: $(2,1)$.

Algemene opl: $\{(\frac{1}{2}, 0) + \lambda\cdot(2,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4 ~~3~~ Voor $t = -1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Er is een spil achter de streep: strijdig stelsel, geen oplossingen.

delen /verm. met t: $\underline{-4}$

5.(a) $[f]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_1)_{E_2} & f(e_2)_{E_2} & f(e_3)_{E_2} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3

3 (b) $[f]_C^B = [id_{\mathbb{R}^2}]_C^{E_2} \cdot [f]_{E_2}^{E_3} \cdot [id_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}^B$

9 (c) $[id]_C^{E_2} = \left([id]_{E_2}^C\right)^{-1}$, $[id]_{E_2}^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) -2 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ dus $[id]_C^{E_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Verder $[id]_{E_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

6 (a) Stelling en V: 1. $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

5 2. $\dim(U+W) \leq \dim V$

Dus $10 + 12 - \dim(U \cap W) \leq 13$, en dat is equivalent met: $\dim(U \cap W) \geq 10 + 12 - 13 = 9$.

We weten ook: $U \cap W \subset U$ dus $\dim(U \cap W) \leq 10$.

De ongelijkheden geven dat $\dim(U \cap W) \in \{9, 10\}$.

Kunnen die ook echt? We geven voorbeelden.

9: $V = \mathbb{R}^{13}$, $U = L(e_1, \ldots, e_{10})$, $W = L(e_2, e_3, \ldots, e_{13})$,

2 dan $U \cap W = L(e_2, \ldots, e_{10})$.

10: $V = \mathbb{R}^3$, $U = L(e_1, \ldots, e_{10})$, $W = L(e_1, \ldots, e_{12})$, $U \cap W = U$.

Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: ____________________ Naam: ____________________

Datum: ____________________ Studierichting: ____________________

Docent: ____________________ Collegekaartnummer: ____________________

6(b) $g_a : x \mapsto (x+a)^2 = x^2 + 2a\cdot x + a^2$

5 Dus $\forall a \in \mathbb{R}$, $g_a \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ = {polynomen van graad ≤ 2}.

Dus $U \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

De andere inclusie geldt ook, want $1, x, x^2$ is een basis van $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $x^2 = g$, $g_1 = x^2+2x+1$, $g_{-1} = x^2-2x+1$, dus $g_1 + g_{-1} = 2x^2+2$, dus

$$1 = \tfrac{1}{2}\cdot(g_1 - 2\cdot g + g_{-1}) \in U$$

$$x = \tfrac{1}{4}\cdot(g_1 - g_{-1}) \in U.$$ Dus $\dim(U) = 2$, basis $1, x, x^2$.

6(c) $V = \mathbb{C}^2$, $f = f_A = A\cdot$, met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5

Dan $P_A(t) = t^2$, dus 0 is de enige eigenwaarde.

$E_0(A) = \ker(A)$: basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dus: meetk. mult. (1)

2 van eigenwaarde 0 is niet gelijk aan alg. mult (2).

Een stelling in het dictaat zegt dan: f is niet diagonaliseerbaar. Maar we zien het ook zonder die stelling, want er zijn geen 2 onafhankelijke eigenvectoren.