Tentamen Lineaire Algebra I (wiskunde)

Bas Edixhoven

16 januari 2019, 10:00–13:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.** Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken. Als je een voorbeeld of tegenvoorbeeld geeft, dan moet je alle objecten daarin expliciet definiëren (het lichaam, de vectorruimte, de vectoren,...). **Controleer** zoveel mogelijk je antwoorden.

Er zijn **6 opgaven**. Indicatieve normering: $6 \times 15 = 90$. Succes!

1. Laat $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en $a \in \mathbb{R}^n$ met $a \neq 0$, en $x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Geef formules voor de loodrechte projecties van x op de lijn $L(a)$ en op $a^\perp$, in termen van a, x en het standaard-inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en de bijbehorende norm $\|\cdot\|$.

   (b) Laat nu $b \in \mathbb{R}$, en $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, a \rangle = b\}$. Bepaal de $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat $x + \lambda a \in H$.

   (c) Bepaal de afstand van $(0,0,0)$ in $\mathbb{R}^3$ naar het hypervlak $H = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, (1,-1,1) \rangle = 1\}$.

2. Laat $v_1 = (1,1,3,9)$, $v_2 = (2,-1,3,-9)$ en $v_3 = (-1,1,-1,9)$ in $\mathbb{R}^4$, en laat $U = L(v_1, v_2, v_3)$ de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ zijn voortgebracht door v_1, v_2, v_3.

   (a) Bereken $d := \dim(U)$ en geef een basis $w_1, \ldots, w_d$ van U zodat de matrix in $\mathrm{Mat}(d \times 4, \mathbb{R})$ met rijen $w_1, \ldots, w_d$ in gereduceerde rijtrapvorm is.

   (b) Geef een basis van $U^\perp$.

   (c) Geef een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en een matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times 4, \mathbb{R})$ zodat $U = \ker(A)$.

3. Laat $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis van de eigenruimte.

   (b) Geef een diagonale matrix D en een inverteerbare matrix P, beide in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, zodat $A = PDP^{-1}$.

4. Laat, voor $t \in \mathbb{R}$, $A_t = \begin{pmatrix} 3-t & -4 \\ 2 & -3-t \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, en laat $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Bepaal voor elke $t \in \mathbb{R}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^2 : A_t \cdot x = b\}$. Hint: het kan rekenwerk besparen als je tijdens je berekeningen ergens $A_t \cdot b$ berekent.

5. Laat $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding zijn gegeven door $f(x, y, z) = (z, 3z - 3x)$.

   (a) Laat E_3 de standaardbasis zijn van $\mathbb{R}^3$, en E_2 de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$. Geef $[f]^{E_3}_{E_2}$.

   (b) Laat $B = (v_1, v_2, v_3)$ de basis van $\mathbb{R}^3$ zijn met $v_1 = (1, 4, 4)$ en $v_2 = (1, 5, 5)$ en $v_3 = (1, 5, 6)$. Laat $C = (w_1, w_2)$ de basis zijn van $\mathbb{R}^2$ met $w_1 = (0, 1)$, $w_2 = (1, 2)$. Je hoeft niet te controleren dat B en C bases zijn. Geef de formule voor $[f]^B_C$ in termen van $[f]^{E_3}_{E_2}$ en de basisveranderingsmatrices.

   (c) Bepaal $[f]^B_C$.

6. (a) Laat V een $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn met $\dim(V) = 13$, en laat U en W deelruimten van V zijn met $\dim(U) = 10$ en $\dim(W) = 12$. Wat zijn dan de mogelijke dimensies van $U \cap W$? Geef voor elke mogelijke dimensie een voorbeeld van een V, U en W.

   (b) Laat $V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn van alle functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Laat $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Wat is dan de dimensie van de deelruimte U van V voortgebracht door alle functies $g_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x + a)$, waarbij a de verzameling $\mathbb{R}$ doorloopt?

   (c) Geef een voorbeeld van een eindig dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte V en een lineaire afbeelding $f \colon V \to V$ die niet diagonaliseerbaar is, en bewijs dat ook.