(20) 4(a) 8

$P_A(t) = \det(t\cdot id - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = t^2-2t+1-4 = t^2-2t-3 = (t-3)\cdot(t+1)$, de eigenwaarden zijn $-1$ en $3$.

$E_{-1}(A) = \ker(A+id) = \ker\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$, basis: $(1,-1)$.

$E_3(A) = \ker(A-3\cdot id) = \ker\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}$, basis: $(1,1)$.

Laat $B$ de basis $(1,-1),(1,1)$ zijn; en $E$ de standaardbasis.

(b) 6

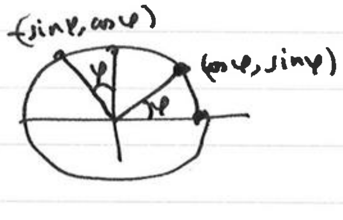
$$A = \underset{P}{[f_A]^E_E = [id]^B_E} \cdot \underset{D}{[f_A]^B_B} \cdot \underset{P^{-1}}{[id]^E_B}, \quad P = [id]^B_E = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

(c) 6 We nemen $B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, dan $P_B(t) = t^2$, alleen e.w. $0$, en de eigenruimte is $\ker(B) = L((1,0))$ heeft maar dimensie 1. Er is geen basis van eigenvectoren.

(15) 5(a) 4

$$[\rho_\varphi]^E_E = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$




(b) 5 De volgende uitspraken zijn equivalent:

(i) $f$ is niet injectief, (ii) $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ met $f(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=0$ en $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq 0$,

(iii) $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ met $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$ en $\lambda_1 f(e_1)+\dots+\lambda_n f(e_n)=0$.

(iv) $f(e_1),\dots,f(e_n)$ zijn lineair afhankelijk.

Toelichting: (i)$\iff$(ii): def. van injectief; (ii)$\iff$(iii): $f(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = f(\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1)+\dots+\lambda_n f(e_n)$ (lineariteit van $f$); (iii)$\iff$(iv): def. van afhankelijkheid.

(c) 6 WAAR. Laat $u_1,\dots,u_d$ een basis van $U$ zijn, en breid deze uit tot een basis $u_1,\dots,u_d,u_{d+1},\dots,u_n$ van $V$, en definieer de lin. afb. $f$ door: $f(u_1)=0, \dots, f(u_d)=0, f(u_{d+1})=u_{d+1}, \dots, f(u_n)=u_n$.

(preciezer: $f(u_i)=0$ als $i\le d$ en $f(u_i)=u_i$ als $i>d$).

Dan $\ker(f) = L(u_1,\dots,u_d) = U$.

Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen



Vak: Lineaire Algebra 1, wiskunde　Naam: Bas Edixhoven

Datum: 2018/01/18.　Studierichting:

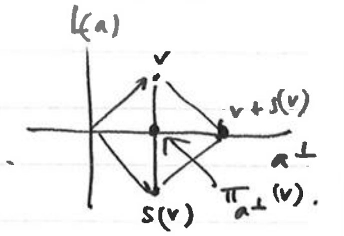
Docent:　Collegekaartnummer:

(15) 1(a) 3

$s(v) = v - \frac{2\cdot\langle v,a\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a$ $\quad \langle v,a\rangle = 12+6+5+2=25$, $\langle a,a\rangle = 16+4+1+4=25$

$= v - 2\cdot\frac{25}{25}\cdot a$

$= (3,3,5,-1) - 2\cdot(4,2,1,-2) = (-5,-1,3,3)$.




Dus $s(v) = (-5,-1,3,3)$, $s(v)+v = (-2,2,8,2)$.

We kunnen controleren dat $v+s(v)\in a^\perp$:

$\langle v+s(v), a\rangle = -8+4+8-4 = 0$.

(b) 3 $\pi_{a^\perp}(v) = \frac12(v+s(v)) = (-1,1,4,1)$, en we kunnen dat ook berekenen als: $\pi_{a^\perp}(v) = v - \frac{\langle v,a\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a = v-a$.

(c) 6 In $\mathbb{R}^4$ zijn de deelruimten $L(a)$ en $a^\perp$ complementair. $L(a)$ is de eigenruimte met eigenwaarde $-1$, en $a^\perp$ die met eigenw. $1$. Bases: $a=(4,2,1,-2)$ van $L(a)$, en $(1,0,-4,0)$, $(0,1,-2,0)$, $(0,0,2,1)$ van $a^\perp$ (deze 3 zijn onafh. want kijk maar naar de coördinaten 1, 2 en 4.

(d) 3 Laat $B$ mijn basis van $\mathbb{R}^4$ in (c) zijn. Dan $[s]^B_B = \begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, dus $\det(s) = -1$.

(10) 4

2. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} R2 \\ R1 \\ R3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$\begin{array}{c} R1 \\ R2-2R1 \\ R3-R1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ R3 \\ R2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$\begin{array}{c} . \\ . \\ R3+R1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R1-R2-4R3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

hier in rijtrapvorm

(b) Er is 1 vrije variabele, $x_3$, dus $\dim(\ker A) = 1$, en een basis
3 is: $(-2, 3, 1, 0)$.
Controle: deze zit inderdaad in $\ker A$.

(c) Dit kan op meerdere manieren.
3 (1) rangenstelling: $f_A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $rk(A) = 4 - \dim \ker(A) = 4-1 = 3$.
(2) rij operaties veranderen de rang niet, en de rijtrapvorm heeft 3 rijen ongelijk nul, dus rijrang$(A) = 3$, en dat is ook de rang.
(3) rij operaties veranderen de (kolom)rang niet, en de ger. rijtr.vorm heeft 3 spillen dus rang 3.



3.(a) Per definitie: $U = L(b_1, b_2)$ met $b_1 = (0,1,0,0)$ en $b_2 = (1,0,1,0)$.
(30) 4 Net zo: $V = L(c_1, c_2)$ met $c_1 = (0,0,1,0)$ en $c_2 = (0,1,0,1)$.
$b_1$ en $b_2$ lin. onafh; want $b_1 \neq 0$ en $b_2 \notin L(b_1)$.
$c_1$ en $c_2$ lin. onafh. want $c_1 \neq 0$ en $c_2 \notin L(c_1)$.

(b) We zetten $b_1, b_2, c_1, c_2$ als kolommen in een matrix, zeg $A$.
4 Dan is $\ker A$ de verz. van lin. relaties tussen $b_1, b_2, c_1, c_2$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} R2 \\ R1 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ R3-R2 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dus $rk(A) = 4$. $\ker(A) = \{0\}$.

Dus $b_1, b_2, c_1, c_2$ lin. onafh., en het zijn er 4, dus een basis v. $\mathbb{R}^4$!

(c) $U + V = \mathbb{R}^4$ want $b_1, b_2, c_1, c_2$ alle 4 in $U \cup V$, dus $\underset{U+V}{L(U\cup V)} \overset{\text{we gebr. (b)}}{=} \mathbb{R}^4$
4 $U \cap V = \{0\}$: $\alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 = \delta \cdot c_1 + \gamma \cdot c_2 \Rightarrow \alpha = 0 = \beta = \gamma = \delta$ want
$b_1, b_2, c_1, c_2$ zijn lin. onafh.

(d) Er is zo'n $f$; want er is een unieke $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ met
4 $f(b_1) = b_1$, $f(b_2) = b_2$, $f(c_1) = 0$ en $f(c_2) = 0$ (lin. afb. uniek bepaald door wat ze doen op een basis). De uniciteit is al uitgelegd.

(e) $[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, want $[f(b_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, etc.
3

3 (f) $[f]_E^E = [id_{\mathbb{R}^4}]_E^B \cdot [f]_B^B \cdot [\overset{id}{\cancel{f}}]_B^E$

5 (g) $[id_{\mathbb{R}^4}]_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[id_{\mathbb{R}^4}]_B^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ want $e_1 = b_2 - c_1$
$e_2 = b_1$
$e_3 = c_1$, $e_4 = c_2 - b_1$.

$[f]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot [id]_B^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 (h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2b_1 + b_2 \in U$, $w - f(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ +4 \\ +2 \\ +4 \end{pmatrix} = +2c_1 + 4c_2 \in V$