Toets Lineaire algebra I (wiskundigen)

Bas Edixhoven

22 oktober 2018, 11:00–13:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.**
Controleer zoveel mogelijk je antwoorden.
Er zijn **4 opgaven**. Indicatieve normering: 20+20+30+20 = 90. Succes!

1. Laat $a = (1, -1, 2, -2)$ en $v = (4, 0, 5, -3)$ in $\mathbb{R}^4$.
   (a) Bepaal de projectie $\pi_{L(a)}(v)$ van v op de lijn $L(a)$.
   (b) Bepaal de projectie $\pi_{a^\perp}(v)$ van v op het hypervlak $a^\perp$.
   (c) Bepaal de afstand $d(v, L(a))$ van v tot $L(a)$.

2. Laat $a = (1, 2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$.
   (a) Geef v_1 en v_2 in $\mathbb{R}^3$ zodat $a^\perp = L(v_1, v_2)$.
   (b) Laat $b = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Bewijs dat $a^\perp + L(b) = \mathbb{R}^3$.

3. (a) Laat $n \geq 1$ en laat S en T deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$.
   Bewijs dat $S^\perp \cap T^\perp = (S \cup T)^\perp$.
   (b) Laat V een $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn, en U_1, U_2 en U_3 deelruimten van V. Laat zien dat $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subset U_1 \cap (U_2 + U_3)$.
   (c) Is het waar of niet waar dat in de situatie van onderdeel (b) altijd geldt dat $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_1 \cap (U_2 + U_3)$?

4. Laat V de $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn van alle differentieerbare functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Welke van de volgende afbeeldingen zijn lineair?
   (a) De afbeelding $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^3$, $f \mapsto (f'(0), f'(1), 1)$.
   (b) De afbeelding $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f'(0) + f(1)$.
   (c) De afbeelding $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$, $x \mapsto \varphi_x$, met $\varphi_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x\sin(y)$.
   (d) De afbeelding $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$, $x \mapsto \varphi_x$, met $\varphi_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \sin(xy)$.