Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Vak: Lineaire Algebra 1 Naam: Bas Edixhoven.

Datum: 2018/10/22 Studierichting:

Docent: Edixhoven Collegekaartnummer:

1\. (a) (7) (20) $\langle a,a\rangle = 1+1+4+4 = 10$, $\langle v,a\rangle = 4+10+6 = 20$.

$$\pi_{L(a)}(v) = \frac{\langle v,a\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a = \frac{20}{10}\cdot a = 2a = (2,-2,4,-4).$$

(b) (7) $\pi_{a^\perp}(v) = v - \pi_{L(a)}(v) = (4,0,5,-3) - (2,-2,4,-4) = (2,2,1,1)$.

(Check: $\langle (2,2,1,1),(1,-1,2,-2)\rangle = 2-2+2-2 = 0$.)

(c) (6) $d(v, L(a)) = \| \pi_{a^\perp}(v) \| = \sqrt{4+4+1+1} = \sqrt{10}$.

2\. (a) (10) (20) Veel mogelijkheden. Bijvoorbeeld: ~~...~~ laat $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, dan $v \in a^\perp \iff 0 = \langle v,a\rangle = x + 2y - z$; we lossen dit op: $z = x + 2y$, dat geeft:

$$(x,y,z) = (x,y,x+2y) = x\cdot(1,0,1) + y\cdot(0,1,2).$$

We nemen dus $v_1 := (1,0,1)$ en $v_2 = (0,1,2)$.
Dan v_1, v_2 in $a^\perp$ en iedere $v \in a^\perp$ is in $L(v_1,v_2)$.

(b) (10) Duidelijk is dat $a^\perp + L(b) \subset \mathbb{R}^3$. We laten de andere inclusie zien.

$$(1,0,0) = (1,0,1) - (0,0,1) = v_1 - b \in a^\perp + L(b).$$
$$(0,1,0) = (0,1,2) - 2(0,0,1) = v_2 - 2b \in a^\perp + L(b)$$
$$(0,0,1) = b \in a^\perp + L(b).$$

Dus $\mathbb{R}^3 = L((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \subset a^\perp + L(b)$.

3. (30) (a) (10) We bewijzen dat $S^\perp \cap T^\perp \subset (S \cup T)^\perp$: stel $v \in S^\perp \cap T^\perp$, dan $v \in S^\perp$ en $v \in T^\perp$, dus $\forall a \in (S \cup T)$: $\langle v, a \rangle = 0$, dus $v \in (S \cup T)^\perp$.

We bewijzen dat $(S \cup T)^\perp \subset S^\perp \cap T^\perp$. Wel, $S \subset S \cup T$, dus $(S \cup T)^\perp \subset S^\perp$, en zo ook $(S \cup T)^\perp \subset T^\perp$. Dus $(S \cup T)^\perp \subset S^\perp \cap T^\perp$.

(b) (10) $U_2 \subset U_2 + U_3$, dus $U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap (U_2 + U_3)$.
$U_3 \subset U_2 + U_3$, dus $U_1 \cap U_3 \subset U_1 \cap (U_2 + U_3)$.
Omdat $U_1 \cap (U_2 + U_3)$ een deelruimte van V is, is dan $U_1 \cap U_2 + U_1 \cap U_3 = L((U_1 \cap U_2) \cup (U_1 \cap U_3))$ bevat in $U_1 \cap (U_2 + U_3)$.

(c) (10) Nee, dit is niet waar. Voorbeeld: $V = \mathbb{R}^2$ (en $F = \mathbb{R}$), $U_1 = L((1,1))$, $U_2 = L((1,0))$ en $U_3 = L((0,1))$.
Dan $U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$, dus $U_1 \cap (U_2 + U_3) = L((1,1))$.
Maar $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ en $U_1 \cap U_3 = \{0\}$, dus $U_1 \cap U_2 + U_1 \cap U_3 = \{0\}$.

4. (20) (a) (5) Niet lineair, want $\varphi(0) \neq 0$. $(\varphi(0) = (0,0,1))$.

(b) (5) Lineair: $\forall f,g \in V$ $\varphi(f+g) = ((f+g)'(0) + (f+g)(1)) = (f'(0) + g'(0), f(1) + g(1)) =$
$= (f'(0), f(1)) + (g'(0), g(1)) = \varphi(f) + \varphi(g)$.
$\varphi(\lambda \cdot f) = ((\lambda \cdot f)'(0), (\lambda \cdot f)(1)) = (\lambda \cdot f'(0), \lambda \cdot f(1)) = \lambda \cdot \varphi(f)$.
$\forall f \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(c) (5) Lineair: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi_{x_1+x_2} : y \mapsto (x_1 + x_2) \cdot \sin(y) =$
$= x_1 \cdot \sin(y) + x_2 \cdot \sin(y) = \varphi_{x_1}(y) + \varphi_{x_2}(y)$, dus $\varphi_{x_1+x_2} = \varphi_{x_1} + \varphi_{x_2}$.
Ook: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda \cdot x) = \varphi_{\lambda \cdot x} : y \mapsto (\lambda \cdot x) \cdot \sin(y) = \lambda \cdot \varphi_x(y)$,
dus $\varphi_{\lambda \cdot x} = \lambda \cdot \varphi_x$.

(d) (5) Niet lineair: $\varphi : 1 \mapsto \varphi_1$, en $\forall y \in \mathbb{R}$ $\varphi_1(y) = \sin(y)$.
$2 \mapsto \varphi_2$ en $\forall y \in \mathbb{R}$ $\varphi_2(y) = \sin(2y)$
Neem $y = \frac{\pi}{2}$, dan $\varphi_1(y) = 1$, $\varphi_2(y) = 0$, dus $\varphi_2 \neq 2 \cdot \varphi_1$.