Uitwerkingen werkcollege 1.

1.2.1 (1) $(5,6)$
(2) $(-7,11)$
(3) $(1,7)$
(4) $(5,10)$
(5) $(10,6)$

1.2.2 In het college is een definitie gegeven die zegt dat (p,q,r,s) met p, q, r en s in $\mathbb{R}^2$ de hoekpunten van een parallellogram zijn precies dan als $q-p=r-s$. Aan beide kanten $p+s$ optellen geeft dat $p+r=q+s$.

1.3.1 (1) -9
(2) 34
(3) 0
(4) 0
(5) 34

1.3.2 Other answers may be correct as well!
(1) $v=(1,-3)$, $w=(1,1)$, $a=(3,1)$, $b=4$
(2) $v=(2,1)$, $w=(1,-3)$, $a=(1,-2)$, $b=7$
(3) $v=(1,1)$, $w=(2,0)$, $a=(1,-1)$, $b=2$

1.3.3 (1) $a=(2,3)$, $c=0$
(2) $a=(3,-1)$, $c=1$
(3) $a=(2,2)$, $c=3$

1.3.4 The equation is equivalent with $\langle a,x\rangle=5$ with $a=(0,4,1)$, so V is indeed a hyperplane in $\mathbb{R}^3$, that is, V is a plane.

1.3.5 Other answers may be correct as well!
(3) $v=q-p=(0,3,2,5)$ and $w=p=(1,-1,1,-1)$

1.3.6 Laat $v=(v_1,v_2,v_3)$ een element van $\mathbb{R}^3$ zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent (het argument voor de equivalentie tussen regel n en regel $n+1$ staat op regel $n+1$):

$$\begin{array}{rl}
v\in H\cap H' & \\
(v\in H)\wedge(v\in H') & \text{vanwege definitie doorsnede}\\
(v_1+2v_2-v_3=4)\wedge(-v_1+v_3=0) & \text{definities van } H \text{ en } H'\\
(v_1+2v_2-v_3=4)\wedge(v_1=v_3) & v_1 \text{ naar rechts brengen in verg. } 2^1\\
(2v_2=4)\wedge(v_1=v_3) & v_1=v_3 \text{ invullen in vergelijking 1}\\
(v_2=2)\wedge(v_1=v_3) & \text{vermenigvuldig met } 1/2 \text{ in verg. 1}\\
(v_1,v_2,v_3)=(v_3,2,v_3) & \text{alleen een andere notatie}\\
(v_1,v_2,v_3)=(0,2,0)+v_3\cdot(1,0,1) & \text{definities van } + \text{ en } \cdot
\end{array}$$

Omdat alle condities equivalent zijn hebben we bewezen dat

$$H\cap H'=\{(0,2,0)+\lambda\cdot(1,0,1):\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

1.3.7 Laat L de verzameling $\{\lambda p+\mu q:\lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ en } \lambda+\mu=1\}$. Vanwege Propositie 1.12 in het dictaat is het voldoende te bewijzen dat L een lijn is, en dat L p en q bevat. We laten eerst zien dat L een lijn is. De (λ,μ) in $\mathbb{R}^2$

[1] Dit is een equivalentie want je kunt links en rechts weer v_1 aftrekken. Net zo, verderop, is vermenigvuldiging met 2 de inverse bewerking van vermenigvuldigen met 1/2.

met $\lambda + \mu = 1$ zijn precies de (λ, μ) met $\mu = 1 - \lambda$. Invullen geeft dan $\lambda p + \mu q = \lambda p + (1 - \lambda)q = q + \lambda(p - q)$. Dus $L = \{q + \lambda(p - q) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ en daarom is L een lijn (want $p \neq q$, dus $p - q \neq 0$). Voor $\lambda = 0$ zien we dat $q \in L$ en voor $\lambda = 1$ dat $p \in L$. Klaar.

1.4.1 Laat (p, q, r, s) de hoekpunten van een parallellogram zijn. Dan geldt (vanwege de definitie die in het college is gegeven) dat $q - p = r - s$. Dan zijn de zijden $v = q - p$ en $w = s - p$ en de diagonalen $w + v$ en $w - v$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 &= \|w + v\|^2 + \|w - v\|^2 = \langle w + v, w + v\rangle + \langle w - v, w - v\rangle \\ &= \|w\|^2 + 2\langle w, v\rangle + \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle w, v\rangle + \|v\|^2 \\ &= 2\|w\|^2 + 2\|v\|^2 = 2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

1.4.2 (1) For each $v, w \in R^n$ we have

$$\begin{aligned} \langle v - w, v + w\rangle &= \langle v - w, v\rangle + \langle v - w, w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle w, v\rangle + \langle v, w\rangle - \langle w, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2. \end{aligned}$$

By definition, the vectors $v - w$ and $v + w$ are orthogonal if and only if we have $\langle v - w, v + w\rangle = 0$, which by the above happens if and only if $\|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$, that is, $\|v\| = \|w\|$ (since lengths are nonnegative).

(2) Choose a vertex p of the parallelogram and let v and w be the vectors represented by the arrows from p to the two vertices connected to p. Then the sides of the parallelogram are $\|v\|$ and $\|w\|$. The diagonals of the parallelogram represent the vectors $v - w$ and $v + w$ (after choosing a direction of these diagonals). By part (1) of this exercise they are orthogonal to each other if and only if $\|v\| = \|w\|$, that is, all sides have the same length.

1.4.4 60 degrees

1.4.5 (1) True: the lines do not intersect each other because there is no $x \in \mathbb{R}^2$ with $\langle a, x\rangle = 0$ and $\langle a, x\rangle = 1$.

(2) False: if $a = 2b$, then the line $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle a, x\rangle = 0\}$ is the same as the line $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle b, x\rangle = 0\}$, which is parallel to the line $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle b, x\rangle = 1\}$ by part (1).

(3) True: if $v = (x, y)$, then $\langle 0, v\rangle = 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. (The first 0 in the statement is the zero vector, the second is the real number 0.)