

Uitwerkingen werkcollege 2.

1.4.6 Gegeven is dat $S \subset F^n$ en $0 \in S$.

- (1) Neem aan dat $z \in S^\perp$. Volgens de definitie van S^\perp betekent dit dat voor elke $x \in S$ geldt dat $\langle z, x \rangle = 0$. We moeten bewijzen dat z normaal is op S . Volgens de definitie van normaal betekent dat: voor alle p en q in S geldt dat $\langle z, q - p \rangle = 0$. Laat dan p en q in S zijn. Dan geldt:

$$\langle z, q - p \rangle = \langle z, q \rangle - \langle z, p \rangle = 0 - 0 = 0,$$

waarbij we hebben gebruikt: Propositie 1.4, $q \in S$ en $p \in S$.

- (2) We moeten een equivalentie bewijzen. We bewijzen de twee implicaties 1 voor 1.

Neem aan dat $z \in S^\perp$. Vanwege onderdeel (1) is dan z normaal op S . Neem nu aan dat z normaal is op S . We moeten laten zien dat voor alle $x \in S$ geldt: $\langle z, x \rangle = 0$. Laat $x \in S$. Gegeven is dat $0 \in S$. Dus:

$$0 = \langle z, x - 0 \rangle = \langle z, x \rangle - \langle z, 0 \rangle = \langle z, x \rangle - 0 = \langle z, x \rangle,$$

waarbij we hebben gebruikt: de definitie van normaal, en Propositie 1.4.

1.5.1 Any plane V through p_1, p_2, p_3 is given by

$$V = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle a, v \rangle = b\}$$

for some $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ and some $b \in \mathbb{R}$. The fact that we have $p_i \in V$ for $1 \leq i \leq 3$ implies

$$b = \langle a, p_1 \rangle = a_1 + 2a_3,$$

$$b = \langle a, p_2 \rangle = -a_1 + 2a_2 + 2a_3,$$

$$b = \langle a, p_3 \rangle = a_1 + a_2 + a_3.$$

Subtracting the first two equations yields $a_1 = a_2$. Subtracting the last two equations then gives $a_3 = 2a_1 - a_2 = a_1$. Any of the three equations then gives $b = 3a_1$, so the equation $\langle a, v \rangle = b$ is equivalent with $a_1 \langle (1, 1, 1), v \rangle = 3a_1$, that is, with $\langle (1, 1, 1), v \rangle = 3$. Hence the plane V equals

$$V = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle (1, 1, 1), v \rangle = 3\}.$$

This plane does indeed contain p_1, p_2 , and p_3 (do not forget to check this), so there is indeed a unique plane containing p_1, p_2, p_3 . We may choose $a = (1, 1, 1)$ and $b = 3$.

1.5.2 With $\lambda = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, a \rangle} = \frac{13}{5}$ we get $v_1 = \lambda a = \frac{1}{5}(26, 13)$ and $v_2 = v - v_1 = \frac{1}{5}(-6, 12)$.

1.5.3 With $\lambda = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, a \rangle} = \frac{2x_1 + x_2}{5}$ we get $v_1 = \lambda a = \frac{1}{5}(4x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2)$ and $v_2 = v - v_1 = \frac{1}{5}(x_1 - 2x_2, -2x_1 + 4x_2)$.

1.5.5 Let v be in $S \cap S^\perp$. Then $\langle v, v \rangle = 0$, because, say, the one v is in S and the other v is in S^\perp , and then we use the definition of S^\perp . Then we use that $\langle v, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2$, and that the v_i are in F , hence in \mathbb{R} , so that for each i , $v_i = 0$. Finally, $v = 0$. And $S \cap S^\perp \subset \{0\}$.

1.5.6 Er is een $a \in F^n$ met $a \neq 0$ zodat $W = L(a)$ of $W = a^\perp$. We moeten dus bewijzen dat π_a en π_{a^\perp} de gevraagde eigenschappen hebben. We gebruiken de gegeven formules (1.3).

(1) Voor alle $x \in F^n$ geldt:

$$\pi_a(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a.$$

Dus geldt voor alle x en y in F^n :

$$\begin{aligned} \pi_a(x+y) &= \frac{\langle x+y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a = \left(\frac{\langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \right) \cdot a \\ &= \left(\frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} + \frac{\langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \right) \cdot a = \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a + \frac{\langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a \\ &= \pi_a(x) + \pi_a(y). \end{aligned}$$

Voor alle $x \in F^n$ geldt $x = \pi_a(x) + \pi_{a^\perp}(x)$, dus ook $\pi_{a^\perp}(x) = x - \pi_a(x)$.
Daarom geldt voor alle x en y in F^n :

$$\begin{aligned} \pi_{a^\perp}(x+y) &= x+y - \pi_a(x+y) = x+y - (\pi_a(x) + \pi_a(y)) \\ &= x+y - \pi_a(x) - \pi_a(y) = x - \pi_a(x) + y - \pi_a(y) \\ &= \pi_{a^\perp}(x) + \pi_{a^\perp}(y). \end{aligned}$$

(2) Voor alle $\lambda \in F$ en alle $x \in F^n$ geldt:

$$\pi_a(\lambda \cdot x) = \frac{\langle \lambda \cdot x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a = \frac{\lambda \langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a = \lambda \cdot \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a = \lambda \cdot \pi_a(x).$$

Voor alle $\lambda \in F$ en alle $x \in F^n$ geldt:

$$\begin{aligned} \pi_{a^\perp}(\lambda \cdot x) &= \lambda \cdot x - \pi_a(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot \pi_a(x) \\ &= \lambda \cdot (x - \pi_a(x)) = \lambda \cdot \pi_{a^\perp}(x). \end{aligned}$$

1.6.1 See 1.5.2: We have $v_1 = \frac{13}{5}(2, 1)$ and $v_2 = \frac{6}{5}(-1, 2)$, so

$$\begin{aligned} d(p, L(a)) &= \|v_2\| = \frac{6}{5} \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \frac{6}{5} \sqrt{5} \text{ and} \\ d(p, V) &= \|v_1\| = \frac{13}{5} \sqrt{2^2 + 1^2} = \frac{13}{5} \sqrt{5}. \end{aligned}$$

1.6.3 Laat $x = (1, 1, 1, 1)$ en $a = (1, 2, 3, 4)$. Die afstand is

$$\|x - \pi_{L(a)}(x)\| = \left\| x - \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a \right\| = \left\| x - \frac{1}{3}a \right\| = \|(1/3) \cdot (2, 1, 0, -1)\| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

1.6.4 We translate the line L over $-p$ to obtain the line

$$L' = L - p = \{x - p : x \in L\} = L(w).$$

We also translate v and obtain $v' = v - p = (1, -1, 0)$. The distance from v to L is the same as the distance from v' to L' , so we get

$$d(v, L) = d(v', L') = d(v', L(w)) = \|\pi_{w^\perp}(v')\|.$$

With $\lambda = \frac{\langle w, v' \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{1}{30}$ we find

$$\pi_w(v') = \frac{1}{30}w \quad \text{and} \quad \pi_{w^\perp}(v') = v' - \pi_w(v') = \frac{1}{30}(28, -31, -5),$$

so the distance is $\frac{1}{30} \sqrt{28^2 + (-31)^2 + (-5)^2} = \frac{1}{30} \sqrt{1770}$.

- 1.6.6(1) Gegeven is $a = (a_1, a_2, a_3)$ in \mathbb{R}^3 met $\|a\| = 1$, en $p = (x_1, x_2, x_3)$ in \mathbb{R}^3 . Het vlak H waarop geprojecteerd wordt is a^\perp . Het verschil $p - \pi_{a^\perp}(p)$ is gelijk aan $\pi_a(p)$, dus

$$d(p, H) = \|\pi_a(p)\| = \left\| \frac{\langle a, p \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a \right\| = \left\| \frac{f(p)}{1} \cdot a \right\| = |f(p)| \cdot \|a\| = |f(p)| \cdot 1 = |f(p)|.$$

- 1.7.1 Voor $a = (1, 2) \in L$ geldt $L = L(a)$. We schrijven $M = a^\perp$, de lijn door 0 die loodrecht staat op L . De projectie van $v = (5, 0)$ op de lijn L is $\pi_L(v) = \lambda a$ met $\lambda = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, a \rangle} = \frac{5}{5} = 1$, dus $\pi_L(v) = a = (1, 2)$. (Inderdaad staat $v - \lambda a = v - a = (4, -2)$ loodrecht op a .) De spiegeling van v in L is dan $s_L(v) = 2\pi_L(v) - v = (2, 4) - (5, 0) = (-3, 4)$.

(Inderdaad kunnen we nu checken dat $\tilde{v} = (-3, 4)$ voldoet aan de eisen van 1.49: de vector $v - \tilde{v} = (8, -4)$ is een normaal van L en $\frac{1}{2}(v + \tilde{v}) = (1, 2) = a \in L$.)

- 1.7.3 We have $V = a^\perp$. Set $v = (1, 2, -1)$ and $\lambda = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, a \rangle} = -\frac{1}{25}$. Then we have $\pi_a(v) = \lambda a$ and $\pi_V(v) = v - \pi_a(v) = \frac{1}{25}(28, 50, -21)$. We have $v = v_1 + v_2$ with $v_1 = \pi_a(v)$ and $v_2 = \pi_V(v)$. We compute

$$s_a(v) = v_1 - v_2 = \frac{1}{25}(-31, -50, 17),$$

$$s_V(v) = -v_1 + v_2 = \frac{1}{25}(31, 50, -17).$$