Uitwerkingen werkcollege 5.

3.4.10 We moeten een gelijkheid tussen 2 verzamelingen bewijzen, dus we bewijzen elk van de 2 inclusies. Om de notatie simpel te houden noteren we de doorsnede aan de rechterkant van de te bewijzen gelijkheid met W.

Laat $v \in L(S)$. We moeten laten zien dat voor alle deelruimten $U \subseteq V$ met $S \subseteq U$ geldt dat $v \in U$. Laat U zo'n deelruimte zijn. Dan $S \subseteq U$, dus, vanwege Lemma 3.29, geldt $L(S) \subseteq U$, dus $v \in U$. Hiermee is bewezen dat $L(S) \subseteq W$.

Laat nu $w \in W$. Dan geldt, vanwege de definitie van doorsnede, voor elke deelruimte U van V met $S \subseteq U$ dat $w \in U$. Propositie 3.26 zegt dat $L(S)$ een deelruimte van V is, en per definitie van $L(S)$ geldt dat $S \subseteq L(S)$. Dus $w \in L(S)$. Hiermee is bewezen dat $W \subseteq L(S)$.

3.5.1 From $S \subset S \cup T$ and $T \subset S \cup T$ we find $L(S) \subset L(S \cup T)$ and $L(T) \subset L(S \cup T)$ (part (1) of Proposition 3.33), so $L(S) \cup L(T) \subset L(S \cup T)$. Since $L(S \cup T)$ is a linear subspace, we then find from Lemma 3.29, applied to $L(S) \cup L(T)$, that

$$L(S) + L(T) = L\big(L(S) \cup L(T)\big) \subset L(S \cup T).$$

For the converse we use that $S \subset L(S)$ and $T \subset L(T)$, so

$$(S \cup T) \subset (L(S) \cup L(T)) \subset L\big(L(S) \cup L(T)\big) = L(S) + L(T).$$

Since $L(S)+L(T)$ is a linear subspace, we then obtain $L(S \cup T) \subset L(S)+L(T)$ from Lemma 3.29. Together these inclusions prove $L(S \cup T) = L(S)+L(T)$.

3.5.3 We kunnen hier Propositie 3.33 mooi gebruiken. Vanwege onderdeel (4), toegepast met $S = U_1$ en $T = U_2$, geldt

$$U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 \cup U_2)^\perp.$$

Vanwege onderdeel (2), toegepast met $S = U_1 \cup U_2$, geldt

$$(U_1 \cup U_2)^\perp = L(U_1 \cup U_2)^\perp.$$

Vanwege Definitie 3.37 geldt:

$$L(U_1 \cup U_2) = U_1 + U_2, \quad \text{dus ook} \quad L(U_1 \cup U_2)^\perp = (U_1 + U_2)^\perp.$$

3.5.6 (1) We have

$$f_+(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_+(x),$$

so f_+ is even. We also have

$$f_-(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_-(x),$$

so f_- is odd.

(2) Suppose $f \in U_+ \cap U_-$. Then for all $x \in \mathbb{R}$ we have $f(x) = f(-x)$ (because f is even) and $f(-x) = -f(x)$ (because f is odd), so $f(x) = -f(x)$, so $f(x) = 0$. Hence, f is the constant zero function, so $U_+ \cap U_- = \{0\}$. To show that $U_+ + U_- = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, take $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$. Then by part (1), we have $f_+ \in U_+$ and $f_- \in U_-$. From $f = f_+ + f_-$, we conclude $f \in U_+ + U_-$, so $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^\mathbb{R}$.

3.5.7 No, because the intersection is not equal to $\{0\}$, because, for example, the function f given by $f(x) = x^2 - x$ is contained in $U_1 \cap U_2$.

4.1.4 The first is not linear because 0 (that is, $(0,0,0)$) does not map to 0 (that is, $(0,0)$). The second is not linear, because if we call the map f, then we have $f(2e_1) = (4,0,0)$ and $f(e_1) = (1,0,0)$, so $f(2e_1) \neq 2f(e_1)$, so f does not respect scalar multiplication. The others, so (3), (4), (5), and (6), are linear.

4.1.7 (1) Let $x, y \in \mathbb{R}^2$ be two points. Then the points $0, x, x+y, y$ are the vertices of a parallelogram, with the points lying in that order around the perimeter. Since the rotation ρ preserves angles, the images $\rho(0) = 0$ and $\rho(x), \rho(y), \rho(x+y)$ also form a parallelogram, in that order around the perimeter. This means that we have $\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y)$. Because ρ also preserves distances, we also have $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$, so ρ is a linear map.

(2) The image of $(1,0)$ is $(\cos\theta, \sin\theta)$ and the image of $(0,1)$ is $(-\sin\theta, \cos\theta)$.

(3) Since ρ is linear, it sends $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ to (use part (2))

$$\begin{aligned} x\rho((1,0)) + y\rho((0,1)) &= x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

4.2.2 (1) By Example 4.21 we have $\rho^2 + \rho = -\operatorname{id}$. Therefore, Proposition 4.26 yields

$$\begin{aligned} f \circ g &= (\rho - \operatorname{id}) \circ (\rho + 2\operatorname{id}) \\ &= \rho \circ \rho - \operatorname{id} \circ \rho + \rho \circ (2\operatorname{id}) - \operatorname{id} \circ (2\operatorname{id}) \\ &= \rho^2 - \rho + 2\rho - 2\operatorname{id} \\ &= (\rho^2 + \rho) - 2\operatorname{id} = -\operatorname{id} - 2\operatorname{id} = -3\operatorname{id}. \end{aligned}$$

We similarly obtain $g \circ f = -3\operatorname{id}$.

(2) From part (1) we obtain $f \circ (-\frac{1}{3}g) = (-\frac{1}{3}g) \circ f = \operatorname{id}$, so $(-\frac{1}{3}g)$ is the inverse of f, so f is an isomorphism. Similarly, $(-\frac{1}{3}f)$ is an inverse of g, so g is an isomorphism as well.

4.2.5 (0) We moeten bewijzen dat π_U lineair is. Laat v_1 en v_2 in V zijn, en λ in F. Dan zijn er unieke $u_1 \in U$ en $u_1' \in U'$ zodat $v_1 = u_1 + u_1'$. Ook zijn er unieke $u_2 \in U$ en $u_2' \in U'$ zodat $v_2 = u_2 + u_2'$. Per definitie gelden $\pi_U(v_1) = u_1$ en $\pi_U(v_2) = u_2$. We hebben:

$$v_1 + v_2 = (u_1 + u_1') + (u_2 + u_2') = (u_1 + u_2) + (u_1' + u_2'),$$

en omdat U en U' deelruimten zijn hebben we $u_1 + u_2 \in U$ en $u_1' + u_2' \in U'$, dus dit zijn de unieke elementen van U en U' waarvan de som $v_1 + v_2$ is. Er geldt dus $\pi_U(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = \pi_U(v_1) + \pi_U(v_2)$.

(1) De definitie van π_U geeft $\operatorname{im}(\pi_U) \subseteq U$. We gaan de andere inclusie bewijzen. Laat $u \in U$. Dan $\pi_U(u) = u$, want $u = u + 0$ en $u \in U$ en $0 \in U'$. Nu bewijzen we $\ker(\pi_U) = U'$ door de twee inclusies te bewijzen. Laat $v \in U'$. Dan $v = 0 + v$ met $0 \in U$ en $v \in U'$ dus $\pi_U(v) = 0$ en $v \in \ker(\pi_U)$. Stel nu $v \in \ker(\pi_U)$. Er unieke $u \in U$ en $u' \in U'$ met $v = u + u'$. Dan $0 = \pi_U(v) = u$, dus $v = 0 + u' \in U'$.

(2) Laat $v \in V$, en $u \in U$ en $u' \in U'$ de unieke elementen zodat $v = u + u'$. Dan $\pi_U(v) = u$, en omdat $u = u + 0$ met $u \in U$ en $0 \in U'$, $\pi_U(u) = u$. Dus voor alle v in V hebben we $\pi_U(\pi_U(v)) = \pi_U(u) = u$, dus $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$.

(3) Laat $v \in V$. Laat $u \in U$ en $u' \in U'$ de unieke elementen zijn met $v = u + u'$. Dan $(\mathrm{id}_V - \pi_U)(v) = \mathrm{id}_V(v) - \pi_U(v) = v - u = u'$. Aan de andere kant geldt $\pi_{U'}(v) = u'$. Dus voor alle $v \in V$ geldt dat $(\mathrm{id}_V - \pi_U)(v) = \pi_{U'}(v)$, dus $\mathrm{id}_V - \pi_U = \pi_{U'}$.

4.2.8 De oplossing is eenvoudig te geven als je hem kent, maar minder makkelijk om te vinden. Gegeven is dat $f^k = 0$, en we moeten laten zien dat $\mathrm{id} - f$ een inverse heeft. Het makkelijkst is natuurlijk als we de inverse (want inversen zijn uniek, als ze er zijn) gewoon op kunnen schrijven. En dat lukt:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f + f^2 \cdots + f^{k-1}) &= \mathrm{id} + f + f^2 \cdots + f^{k-1} - (f + f^2 \cdots + f^k) \\ &= \mathrm{id} - f^k = \mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

Natuurlijk geldt ook dat $(\mathrm{id} + f + f^2 \cdots + f^{k-1}) \circ (\mathrm{id} - f) = \mathrm{id}$. Dus we hebben de inverse van $\mathrm{id} - f$ gevonden.

Een legitieme vraag is: hoe kom je hier nu op? Wel, we zouden geïnspireerd kunnen zijn door Example 4.29(1), waar het geval $k = 2$ staat (zie ook de alternatieve oplossing hieronder). We zouden on ook kunnen herinneren dat in $\mathbb{R}[x]$ de volgende gelijkheid geldt (die je hebt gezien in een bewijs van convergentie van de meetkundige reeks) voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 - x)\cdot(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

Alternative solution.

Note that we have $(\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f) = \mathrm{id} - f^2$. For each $e > 0$ we have

$$(\mathrm{id} - f) \circ \underbrace{(\mathrm{id} + f) \circ (\mathrm{id} + f^2) \circ (\mathrm{id} + f^4) \circ \cdots \circ (\mathrm{id} + f^{2^e})}_{g} = \mathrm{id} + f^{2^{e+1}}.$$

Hence, for e such that $2^{e+1} \geq k$, we get $(\mathrm{id} - f) \circ g = \mathrm{id}$. The endomorphisms of which g is the composition all commute with each other, so we similarly also have $g \circ (\mathrm{id} - f) = \mathrm{id}$, so $\mathrm{id} - f$ is an isomorphism.