97 Drie equivalente condities voor compactheid; 2004/03/22

97.1 Definition. Een metrische ruimte (X, d) heet *precompact* als voor iedere $\varepsilon > 0$ er eindig veel bollen zijn van straal ε die X overdekken, d.w.z. als er een $n \geq 0$ is en $x_1, \ldots, x_n$ in X met $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$.

Een metrische ruimte (X, d) heet *volledig* als iedere Cauchy rij in X convergeert.

Een metrische ruimte heet *rijcompact* als iedere rij in X een convergente deelrij heeft.

97.2 Theorem. *Laat (X, d) een metrische ruimte zijn. Dan zijn de volgende condities equivalent:*

1. *X is compact;*
2. *X is rijcompact;*
3. *X is precompact en volledig.*

Proof. We bewijzen dat $(1) \Rightarrow (2)$. Dit volgt direct uit Bolzano-Weierstrass (Stelling 3.8 uit het boek), maar we spellen het nogmaals uit. We nemen dus aan dat X compact is, en we laten $x_0, x_1, \ldots$ een rij in X zijn. Als de deelverzameling $\{x_0, x_1, \ldots\}$ eindig is, dan is er een constante deelrij $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots$, en die convergeert zeker. Als aan de andere kant die deelverzameling oneindig is, dan heeft-ie een limietpunt (Stelling 3.8 van het boek). Kies een limietpunt a. We construeren een deelrij $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots$ als volgt. Neem i_0 zo dat $x_{i_0} \neq a$. Stel nu dat $i_0, \cdots, i_{r-1}$ al gekozen zijn. Kies dan i_r zo dat $d(x_{i_r}, a) < d(x_{i_{r-1}}, a)/2$. Dan convergeert de zo verkregen deelrij naar a.

Laten we nu bewijzen dat $(2) \Rightarrow (3)$. We nemen dus aan dat X rijcompact is, en we willen laten zien dat X precompact en volledig is. Eerst de volledigheid. Laat $x_0, x_1, \ldots$ een Cauchy rij zijn. Vanwege de rijcompactheid is er dan een convergente deelrij $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots$. Laat a de limiet van deze deelrij zijn. We claimen dat $x_0, x_1, \ldots$ naar a convergeert. Laat namelijk $\varepsilon > 0$. Dan is er een K in $\mathbb{N}$ zodat $d(x_{i_k}, a) < \varepsilon/2$ voor alle $k \geq K$. En er is een N zodat $d(x_i, x_j) < \varepsilon/2$ voor alle $i \geq N$ en $j \geq N$. Laat $M := \max(i_K, N)$. Dan geldt voor alle $m \geq M$ dat:

$$d(x_m, a) \leq d(x_m, x_{i_K}) + d(x_{i_K}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Nu dan de precompactheid. Stel dat X niet precompact is, en laat $\varepsilon > 0$ zijn zodat X niet met eindig veel $B(x, \varepsilon)$ overdekt kan worden. We maken dan een rij $x_0, x_1, \ldots$ in X als volgt. Stel dat $x_0, \ldots, x_r$ al gekozen zijn. Dan is $B(x_0, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_r, \varepsilon)$ niet gelijk aan X. Kies dan x_{r+1} buiten $B(x_0, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_r, \varepsilon)$. We claimen dat $x_1, x_2, \ldots$ geen convergente deelrij heeft. Stel namelijk dat $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots$ een convergente deelrij is, en laat a de limiet zijn. Dan is er een $K \geq 0$ zodat $d(x_{i_k}, a) < \varepsilon/2$ voor alle $k \geq K$. Maar dan hebben we $d(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) < \varepsilon$, in tegenspraak met de constructie van $x_0, x_1, \ldots$. De rij $x_0, x_1, \ldots$ heeft dus geen convergente deelrij, wat in tegenspraak is met de aanname dat X rijcompact is. Dus is X wel precompact.

Tot slot bewijzen we dat $(3) \Rightarrow (1)$. Dit is verreweg de moeilijkste stap. We nemen dus aan dat X precompact en volledig is. Stel nu dat X niet compact is. Laat dan $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_X$ een open overdekking van X zijn die geen eindige deeloverdekking heeft. Dan is er een x_1 in X zodat $B_1 := B(x_1, 1)$ niet door eindig veel elementen van $\mathcal{C}$ wordt overdekt, want X is precompact en wordt dus door eindig veel $B(x, 1)$ overdekt. Vervolgens is er een x_2 in X zodat $B_2 := B(x_2, 1/2) \cap B_1$ niet door eindig veel elementen van $\mathcal{C}$ wordt overdekt, want B_1 wordt al door eindig veel $B(x, 1/2)$ overdekt. Zo gaan we door: stel we hebben zo al deelverzamelingen $B_1, \ldots, B_r$ en elementen $x_1, \ldots, x_r$ gedefinieerd, zodat B_i niet door eindig veel elementen van $\mathcal{C}$ wordt overdekt, en zodat $B_{i+1} = B(x_{i+1}, 1/2^i) \cap B_i$. Dan kiezen we x_{r+1} zo dat $B_{r+1} := B(x_{r+1}, 1/2^r) \cap B_r$ niet door eindig veel elementen van $\mathcal{C}$ wordt overdekt (dit kan omdat B_r al door eindig veel $B(x, 1/2^r)$ wordt overdekt).

We merken nu op dat $B_i \neq \emptyset$ voor alle i. Ook merken we op dat, voor alle i, $B_i \subset B(x_i, 1/2^{i-1})$, dus dat $\operatorname{diam}(B_i) \leq 1/2^{i-1}$, en dat $B_{i+1} \subset B_i$. Kies nu, voor alle i, een b_i in B_i. Dan is de rij $b_1, b_2, \ldots$ een Cauchy rij, want $d(b_n, b_{n+m}) \leq 1/2^{n-2}$. Aangezien X volledig is, is deze Cauchy rij convergent. Laat b de limiet zijn. Dan is er een C in $\mathcal{C}$ die b bevat. Maar dan bevat C ook B_i als i voldoende groot is, hetgeen in flagrante tegenspraak is met de eigenschap dat B_i niet door eindig veel elementen van $\mathcal{C}$ wordt overdekt. $\square$

98 Edixhoven's Peano curve; 2004/03/22

Let $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (the set of functions from $\mathbb{N}$ to $\{0,1\}$). We put the discrete topology on $\{0,1\}$ and the product topology on X. Note that X is compact (to prove this, one may equip each factor $\{0,1\}$ with the metric d whose values are 0 and 1, and X with the metric given by $D(x,y) = \sum_{i\geq 0} d(x(i),y(i))/2^i$, and show that X is precompact and complete). Let:

$$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2}{3}\sum_{i\geq 0} x(i)3^{-i}.$$

This map is injective, continuous, and hence the image C is closed. The image C is the set of real numbers in $[0,1]$ that can be written in base 3 without the digit 1, i.e., the standard Cantor set ($[0,1]$ with $(1/3,2/3)$ removed, etc.). So, f is an isomorphism of topological spaces from X to C. Put:

$$g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geq 0} x(2i)2^{-i}, \sum_{i\geq 0} x(2i+1)2^{-i}\right).$$

Then g is continuous, and the image clearly is the unit square $[0,1]^2$, because every element of $[0,1]$ can be written in base 2. Now consider the function:

$$h := g \circ f^{-1}\colon C \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

This h is continuous, on the closed subset C of $[0,1]$, hence can be extended to a continuous function $k\colon [0,1] \to [0,1]^2$ as follows. The open subset $[0,1] - C$ is the disjoint union of open intervals (namely, the ones that were removed in the construction of the Cantor set C). On each of these open intervals, just interpolate linearly between the endpoints. As $[0,1]^2$ is convex, this gives a Peano curve k, i.e., a surjective continuous map from $[0,1]$ to $[0,1]^2$.

A nice property of this Peano curve k is that it is differentiable (even linear) on an open subset of measure 1 of $[0,1]$. The image of this open subset of measure one has measure zero, and the image of its closed complement of measure zero has measure one.