Galois representaties bij Hilbert modulaire vormen (een begin)*

Lenny Taelman

June 21, 2004

1 Inleiding

Vandaag hebben we de gegevens: K een getallenlichaam en de verzameling van inbeddingen $J_K = \{K \hookrightarrow \mathbb{C}\} = J_\mathbb{R} \cup J_\mathbb{C} \cup \overline{J_\mathbb{C}}$, opgedeeld in reele en complexe.

Van belangstelling voor ons zijn: $X_2 = \mathbb{C} - \mathbb{R}$ het dubbele halfvlak met een werking van $GL_2(\mathbb{R})$.

$X_3 = \{x + iy + zj | z > 0\} \subset$ Quaternionen met een werking van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Voor ons getallenlichaam nemen we in het algemeen $X_K = X_2^{J_\mathbb{R}} \times X_3^{J_\mathbb{C}}$ met een werking van $\mathrm{GL}_2(K)$ via de inbeddingen uit $J_\mathbb{R}$ en $J_\mathbb{C}$.

We gebruiken de gewone notaties $\mathcal{O}_K$, $\widehat{\mathcal{O}_K}$, $\mathbb{A}_{f,K}$, $N \lhd \mathcal{O}_K$ voor de ring van gehele getallen, zijn completering, de eindige adelen over K en een ideaal.

We hebben de congruentie ondergroep

$$K_1(N) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}) | c \equiv 0, d \equiv 1 \mod N\}.$$

Daarmee hebben we ook het volgende dubbel quotient

$$Y_1(N) = \mathrm{GL}_2(K)\backslash(\mathrm{GL}(\mathbb{A}_{f,K})/K_1(N) \times X_K).$$

Formeel lijkt dit heel erg op een Shimura varieteit. Als d de graad van K over $\mathbb{Q}$ is, dan is $Y_1(N)$ een reele varieteit van dimensie $2d - \#J_\mathbb{C}$. Enkel waneer K totaal reeel is, voldoet dit dubbel quotient aan Deligne's axiomas, en draagt het een algebraische structuur. In dat geval

*Notes typed by Gabor Wiese

hebben we een Hilbert modulaire varieteit, en in het bijzonder voor $K = \mathbb{Q}$ een gewone modulaire kromme. Het geval K quadratisch imaginair, is waarover Jaap laatste keer gepraat heeft.

Het werk van Harder geeft

$$H^d(Y_1(N), \mathbb{C}) = \text{“modulaire vormen”}.$$

Als voorbeeld hebben we over $\mathbb{Q}$ dat de rechterkant de direct som van de modulaire vormen en de antiholomorfe cuspvormen is.

We definieren $H^d_! = \mathrm{Image}(H^d_c \to H^d)$, de *parabolische cohomologie*. Deze cohomologie bevat de cuspvormen.

Men kan een Hecke algebra definieren. Die werkt op $H^d_!$, en heel interessant zijn de eigenvectoren en eigenwaarden van die actie. Over die eigenvectoren bestaan allerhande vermoedens zoals Ramanujan-Peterson (over de groei van de eigenwaarden van de T_p bij een gegeven gemeenschappelijk eigenvector), en het bestaan van geassocieerde tweedimensionale Galois representaties van $\overline{K}/K$. Dit laatste heeft Theo uitgelegd in het geval K=$\mathbb{Q}$. Vandaag proberen we die constructie te veralgemenen tot totaal reele K's. Het algemene geval is veel te moeilijk omdat we geen algebraische meetkunde kunnen gebruiken op $Y_1(N)$ als K niet totaal reeel is.

Vanaf nu zij K een totaal reeel lichaam.

2 Theo's drie stappen

We beginnen eerst met $K = \mathbb{Q}$.

I. $\varprojlim S_{k,\mathbb{C}}(N) = S(k, \mathbb{C}) = \bigoplus_{f \text{ nieuwvorm van gewicht } k} \pi_f$. Dit kan ook over $\overline{\mathbb{Q}_l}$. We hebben dat π_f niet isomorf is met $\pi_{f'}$ als $f \neq f'$.

II. Schoof $\mathcal{F}$ op $X_1(N)$ zodat

$$\varinjlim H^1_!(Y_1(N), \mathcal{F}) \otimes \mathbb{C} = S(k, \mathbb{C}) \oplus \overline{S(k, \mathbb{C})} = \bigoplus \pi_f \otimes \rho_f.$$

III. $H^1_!\mathrm{et}(Y_1(\nu), \mathcal{F} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l})$ bestaat en heeft dus een actie van $G_{\mathbb{Q}}$.

Deze drie stappen zijn genoeg, om 2-dimensionale Galois representaties te verkrijgen. Tweedimensionaal, want rechts in stap II. komt elke cuspvorm precies twee keer voor.

Voor totaal reele K willen we nu hetzelfde proberen. Stap I. geloven we maar. In stap twee zullen we rechts meerdere termen vinden. Immers, we vinden niet enkel cuspvormen die holomorf of antiholomorf zijn, maar ook cuspvormen die misschien holomorf in de eerste en antiholomorf in de tweede variabele zijn. We verwachten dus 2^d componenten. Om tweedimensionale representaties te krijgen zullen we daar dus moeten partitioneren in twee groepen die onderling geconjugeerd zijn. Dit begrijpt Lenny nog niet.

3 Hilbert modulaire vormen

Gewicht: $k = (k_\tau)_{\tau \in J_K} \in \mathbb{Z}[J_K]$ zo dat $k_\tau \geq 2$ voor alle τ. We hebben ook $k_\tau \equiv k_{\tau'} \mod 2$ nodig voor ons constructie van de schoof $\mathcal{F}$ nu. (volgens Bas niet nodig voor constructie van de schoof). Deze voorwaarden heten: k is *arithmetisch*.

Type op oneindig: $J' \subseteq J$, dus 2^d mogelijkheden. We zetten voor $z = (z_\tau)_\tau$ dat $z_\tau^{J'} = z_\tau$ als $\tau \in J'$ en $z_\tau^{J'} = \overline{z_\tau}$ als $\tau \notin J'$.

$f : X^* \to \mathbb{C}$ is een *Hilbert modulaire cuspvorm van gewicht k en type J'* voor Γ als

1) $f(\gamma z) = f(z) \prod_\tau \frac{\det(\gamma_\tau)^{k/2}}{(c_\tau z_\tau + d_\tau)^{k_\tau}}$ voor $\gamma = \begin{pmatrix} a_\tau & b_\tau \\ c_\tau & d_\tau \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})^J$.

2) $f(z^J)$ is holomoorf, i.e. $f(z_\tau)$ holomoorf in z_τ als $\tau \in J'$ en antiholomoorf in z_τ als $\tau \notin J'$.

3) $f = 0$ op de cuspen.

Zij $S_{k,J'}(\Gamma, \mathbb{C})$ de ruimte van deze vormen en $S_{k,J'}$ de directe limiet over alle Γ. Analoge definities voor cuspvormen op de adelisch gedefinieerde shimuravarieteiten (dus met meerdere samenhangende componenten). Hier hangt de definitie af van de keuze van shimuravarieteit (gebruiken we G of G'?).

4 De schoof $\mathcal{F}(\mathbb{C})$

(Men kan $\mathbb{C}$ ook door een kleiner algebraisch afgesloten lichaam vervangen. We willen eigenlijk coefficienten zodat we dit ook uit l-adische cohomologie kunnen verkrijgen)
Voorbeelden (Theo): als $k = (2)$, dan is $\mathcal{F} = \mathbb{C}$.
Als $k = (3)$, dan is $\mathcal{F} = G(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{C}^2$ op X.
Als $k = (d)$, dan is $\mathcal{F} = \mathrm{Sym}^{k-2}\,\mathbb{V}_3 = \mathbb{V}_k$.

In het algemeen

$$V_k(\mathbb{C}) = \{\text{polynomen in } (x_\tau, y_\tau)_{\tau \in J} \text{ die homogeen zijn van graad } k_\tau - 2 \text{ in } (x_\tau, y_\tau)\}.$$

De groep $G(\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(K)$ werkt op $V_k(\mathbb{C})$ als volgt: een element $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ werkt door substitutie via $\tau(g)$ op (x_τ, y_τ). Doch deze aktie geeft een slecht quotient (slechte aktie van het centrum), daarom maken we de gewichten parallel door te tensoreren met $\tau(\det g)^{(n-k_\tau)/2}$, voor een voldoende grote n. Hier hebben we nodig dat k arithmetisch is. Volgens Bas is dit niet nodig en moet dit ook kunnen zonder te tensoreren met determinanten door niet G maar de deelgroep van matrices met rationale determinant te gebruiken. (zie voordracht van Robert).

We bekijken

$$G(\mathbb{Q})\backslash(V_K(\mathbb{C}) \times X \times G(\mathbb{A}_f)/U) \to G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(_f)/U)$$

met $G = \mathrm{Res}_{K|\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_{2,K}$.

Theorem 1 (Hida, Harder) *Als $k \neq (2, 2, \dots)$, dan is er een isomorfisme*

$$\bigoplus_{J'} S_{J'}(k, \mathbb{C}) \to \lim_{\rightarrow} H^d_!(Y_k, \mathbb{V}_k(\mathbb{C})).$$

Referentie voor deze stelling: Hida, Duke Mathematical Journal, **74**, 1994