

TENTAMEN ANALYSE 4. 19 mei 2003. 10.10-13.10.

1. Bereken m.b.v. contourintegratie:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

Schrijf duidelijk alle tussenstappen op.

2. Bewijs dat alle nulpunten van het polynoom  $z^5 + z^2 + 3$  in de ring  $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}$  liggen.

3. Gegeven is de functie  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 15}$ .

- a. Bepaal de Laurentreeks van  $f(z)$  met centrum  $z = 0$  voor het ringvormig gebied  $\{z \in \mathbf{C} : 3 < |z| < 5\}$ .
- b.  $f(z)$  is rond  $z = 3$  in een Laurentreeks te ontwikkelen die convergeert voor  $|z-3| > r$  voor zekere  $r$ . Bepaal de minimale waarde van  $r$  en bepaal de Laurentreeks.

4. Los m.b.v. Laplacetransformatie het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin 2x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1/2. \end{cases}$$

(Je kunt zo nodig gebruiken dat  $-2 \sin a \sin b = \cos(a + b) - \cos(a - b)$ ).

- 5a. Toon aan dat de Fouriersinusgetransformeerde van  $e^{-2x}$  gelijk is aan  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{y}{y^2 + 4}$ .

- b. Los het volgende randwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x > 0, 0 < y < 1) \\ u(x, 0) = 0 & (x > 0) \\ u_y(x, 1) = e^{-2x} & (x > 0) \\ u(0, y) = 0 & (y > 0) \end{cases}$$

waarbij  $u(x, y)$  een begrensde functie is voor  $x > 0$ ,  $0 < y < 1$ . Schrijf de oplossing als een enkelvoudige integraal.

TENTAMEN ANALYSE 4. 7 augustus 2003. 14.10-17.10.

1. Bereken m.b.v. contourintegratie:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x}} dx.$$

Schrijf duidelijk alle tussenstappen op.

2. Los het volgende beginwaardenprobleem op m.b.v. Laplacetransformatie:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos 2x \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

(Je kunt gebruiken dat  $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ .)

- 3a. Bepaal alle singulariteiten in het complexe vlak (en hun aard) van de functie

$$f(z) = \frac{1}{(2z+i)^2 \cosh \pi z}.$$

- b. Bereken  $\oint_{|z|=1} f(z) dz$ . Schrijf het antwoord in de vorm  $a+bi$  met  $a, b$  reële getallen.

4. Los op m.b.v. Fouriercosinus- of sinustransformatie:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - 2u = 0 & \text{voor } x > 0, 0 < y < 1 \\ u_x(0, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{als } x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

waarbij  $u(x, y)$  een begrensde functie is voor  $x > 0, 0 < y < 1$ . Schrijf de oplossing als een enkelvoudige integraal.